Fonctions Convexes

1. Montrer que : $\frac{2}{\pi}x \leq sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
2. Soit f de classe C^1 convexe et positive sur IR ayant une dérivée positive sur IR étudier les limites en ∞ de $f(x), f'(x), xf'(x)$
3. Soit f de classe C^2convexe sur IR , on suppose qu'il existe $(a,b) \in IR^2$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$
   - **a.** montrer alors que f est affine sur $[a,b]$, (c-a-d : $f(x) = \alpha x + \beta$
   - **b.** reprendre la même question en supposant cette fois f seulement continue convexe
4. Soit $(a,b) \in IR^2, (a < b)$ et f de classe C^2 convexe sur $[a,b]$qui admet un minimum en a
   - **a.** montrer alors que f est croissante.
   - **b.** reprendre la même question en supposant cette fois f seulement continue convexe
5. Soit f de classe C^2 convexe sur IR , on suppose qu'il existe $a \in IR$ tel que $f'(a) = 0$, montrer que f admet un minimum global en a
6. *Méthode de Newton*

   Soit $(a,b) \in IR^2, (a < b)$ et f de classe C^2 convexe sur $[a,b]$.
   - **a.** montrer que si l'équation$f(x) = 0$ admet au moins 3 solutions alors f est nulles entres ses solutions.
   - **b.** on suppose dans la suite que $f' > 0$ sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) < 0$ montrer alors que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution que l'on notera l.
   - **c.** on pose $x_0 = b, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$montrer que le point $M(x_{n+1}, 0)$ est l'intersection de l'axe (ox) avec la tangente a la courbe de f au point $N(x_n, f(x_n))$.
   - **d.** Montrer que (x_n) decroissante vers l

7. *Inégalité arithmico - géométrique*

En utilisant la convexité de $f : x \to -ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ montrer que :

$$\forall n \in IN^*, \forall (x_1, x_2, .., x_n) \in (IR^+)^n \text{on a :} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$$

8. *Inégalités de Holder et Minkowski*

   a. En utilisant la convexité de $f : x \to -ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ montrer que $:\forall (a,b) \in IR^{+2}, \forall (p,q) \in IR^{+*2}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a : $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ (1).

   b. soient : $n \in IN^*, (x_1, x_2, .., x_n) \in (IR^+)^n, (y_1, y_2, .., y_n) \in (IR^+)^n, (p,q) \in IR^{+*2}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ en utilisant (1) pour $a_i = \frac{x_i^p}{\sum_{j=1}^{n} x_j^p}$, $b_i = \frac{y_i^q}{\sum_{j=1}^{n} y_j^q}$ montrer que :

   $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ (Inégalité de Minkowski)}$$

   c. énoncer l'inégalité de *Cauchy-schwartz* pour $p = q = 2$

   d. soient : $n \in IN^*, (x_1, x_2, .., x_n) \in (IR^+)^n, (y_1, y_2, .., y_n) \in (IR^+)^n, p \in IR^{+*}$ en déduire de (2) l'inégalité suivante dite de *Holder*

   $$: \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

FIN