Feuille d'Exercices

2016-2017

ELBILIASUP Prépas MPSI

VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

© Saint Aubriac

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Loi de probabilité, moments d'une variable aléatoire

Exercice 1 : Soit $\in \mathbf{N}^\star$ et a un entier naturel non nul. Soit X une v.a.r. à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(X=k) = a\binom{n}{k}$$

1. Déterminer a.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 : Soit X une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in]0,1[$.

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \frac{1}{1+X}$. Calculer $E(Y)$.

2. On suppose que $p = \frac{1}{2}$ et que $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = \frac{a^X}{2n}$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $a \in \mathbf{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ telle que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}$. Déterminer a, puis calculer l'espérance et la variance de X.
Indication : pour le calcul de l'espérance et de la variance de X, on pourra plutôt calculer $E(X+1)$ et $E(X(X+1))$.

Exercice 4 : On lance simultanément deux dés à 6 faces. On appelle Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.

2. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 5 : Une urne est composée de n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs et avec remise dans cette urne. On note $b_1, b_2, \dots b_k, \dots$ les numéros des boules prélevées. Les tirages s'arrêtent dès que $b_k \geq b_{k-1}$. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X_n.

2. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
Indication : n pourra commencer par calculer pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X_n > k)$.

3. Calculer l'espérance de X_n. Puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 6 : Temps d'attente Une urne contient $n \in \mathbf{N}^\star$ boules numérotées de 1 à n. On retire l'une après l'autre toutes les boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité pour que les boules 1,2, 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?
Indication : Pour déterminer la probabilité de l'événement A «les boules 1,2,3 sortent consécutivement et dans cet ordre» on sera amené à dénombrer A.

2. Calculer la probabilité que les boules 1, 2, 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

3. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir les boules 1, 2 et 3. Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance.

Lois finies usuelles

Exercice 7 : Dans une ville, une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle soit elle-même contaminée.
Un représentant de commerce (en parfaite santé) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

1. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades rencontrés par le représentant. Quelle est la loi de N ?

2. Quelle est la probabilité que le représentant soit contaminé à l'issue de sa tournée ?

Exercice 8 : Une urne contient $2n$ boules : n blanches et n noires. On pioche au hasard et simultanément n boules. On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 9 : On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat du test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :

- **Méthode 1** On analyse le sang de chacune des N personnes.

- **Méthode 2** On regroupe la population en g groupes de n individus. On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

1. Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?

2. Soit Y la variable égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n, p.

3. Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000, n = 100$ et $p = 0,01$.

Exercice 10 : Le service après-vente d'un hypermarché spécialisé dans la vente de matériel informatique dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Les interventions ont parfois lieu avec du retard. On admet que les appels ont lieu indépendamment les uns des autres et que pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de $0,25$.

1. Un client appelle le service à huit reprises. On désigne par X le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

  a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

  b. Calculer la probabilité de l'événement «le client a subi au moins un retard».

  c. Calculer la probabilité de l'événement «le client a subi moins de quatre retards».

  d. Calculer la probabilité de l'événement «le client a subi moins de quatre retards sachant qu'il en a subi au moins un».

2. On considère un groupe de huit clients différents. Deux d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont dû subir un retard à la suite de leur appel. On contacte, au hasard quatre personnes parmi ces huit. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de clients mécontents parmi les quatre contactés.

  a. Quelle loi de probabilité Y suit-elle ?

  b. Quelle est l'espérance mathématique de Y ?