Probabilités élémentaires et conditionnelles

 * très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (*T) (extrait de la revue Scientific American de 1959)

Mr. Jones has two children. The older child is a girl. What is the probability that both children are girls ? (c'est-à-dire : Mr Jones a deux enfants. L'ainée est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?)

Mr. Smith has two children. At least one of them is a boy. What is the probability that both children are boys ? (c'est-à-dire Mr Smith a deux enfants. L'un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

Exercice n° 2 : (*T)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé tels que $p(A) = 0,4$ et $p(B) = 0,6$ et $p_{\overline{A}}(B) = 0,4$.
Calculer $p_A(B)$, $p(A \cup B)$ et $p_{\overline{B}}(A)$.

Exercice n° 3 : (T)**

1) On tire 5 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 cœurs ?
2) On tire 5 cartes successivement et sans remise dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 cœurs ?
3) On tire 5 cartes successivement et avec remise dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 cœurs ?

Exercice n° 4 : (T)**

Une urne contient 4 boules blanches et 3 noires. On tire 3 boules une par une sans remise.
Quelle est la probabilité que la première soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice n° 5 : (T)**

Dans une loterie, il y a 30 billets dont n sont gagnants. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés. On achète 2 billets au hasard. Déterminer la probabilité de ne rien gagner et en déduire la valeur de n à partir de laquelle on a 90% de chance de gagner.

Exercice n° 6 : (T)**

On jette deux dés non pipés, un dé noir et un dé blanc.
Soient A l'événement : « le chiffre du dé noir est pair », B l'événement : « le chiffre du dé blanc est impair », C l'événement : « les deux chiffres ont même parité ».
Montrer que A et B, A et C, B et C sont indépendants mais que les trois événements A, B et C ne le sont pas.

Exercice n° 7 : (**)

On dispose de $2n$ cartons numérotées de 1 à $2n$. On les tire un par un au hasard. Quelle est la probabilité que les numéros impairs soient tous avant les numéros pairs ?

Exercice n° 8 : (**)

Un jeu de 32 cartes est truqué. Une des cartes, autre que l'as de cœur, a été remplacée par un second as de cœur.

1) On tire 3 cartes simultanément. Quelle est la probabilité que l'on se rende compte de la supercherie ?
2) Et si l'on tire 4 cartes ? 5 cartes ?
3) A partir de combien de cartes a-t-on au moins une chance sur deux de voir la supercherie ?

Exercice n° 9 : (**)

Soit N un entier strictement positif, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.
Une particule se déplace sur une droite en faisant des sauts d'une unité vers la gauche ou vers la droite. A chaque instant, la probabilité qu'elle aille vers la droite est p et celle qu'elle aille vers la gauche $q = 1 - p$, tous ces déplacements étant supposés indépendants.
Initialement, la particule est en $n \in [\![0, N]\!]$, et elle s'arrête dès qu'elle atteint l'une des extrémités de cet intervalle : 0 ou N.
On note q_n la probabilité que la particule s'arrête en 0.

1) a) Justifier que $q_0 = 1$ et $q_N = 0$.
b) Montrer que pour tout n tel que $1 \leqslant n \leqslant N - 1$, on a $q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}$

c) En déduire une expression de q_n en fonction de n, N, p et q.
On pensera à distinguer les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$.

2) Calculer de même la probabilité p_n que la particule s'arrête en N (mêmes cas).

3) Calculer $p_n + q_n$, et en déduire la probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais.

Exercice n° 10 : (Oral CCP)**

1) Enoncer et démontrer la formule de BAYES.

2) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice n° 11 : (Oral CCP)**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n-ème tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1) Calculer p_1.

2) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

3) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice n° 12 : (***) (le problème du scrutin)

Au cours d'une élection, deux candidats A et B s'affrontent. Le candidat A l'emporte sur le candidat B par a voix contre b ($a > b$). On veut calculer la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été constamment en tête.

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points (α, β) et $(\alpha + m, \beta + m)$ où $(\alpha, \beta, m, n) \in \mathbb{N}^4$.
On va de (α, β) à $(\alpha + m, \beta + m)$ par déplacements successifs de une unité vers la droite ou une unité vers le haut à chaque étape. On appelle chemin de (α, β) et $(\alpha + m, \beta + m)$ un tel trajet.
Combien y-a-t-il de chemins de (α, β) et $(\alpha + m, \beta + m)$?

2) a) Montrer qu'un chemin de $(0, 1)$ à (a, b), a au moins un point commun avec la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Montrer qu'il y a autant de chemins de $(0, 0)$ à (a, b), passant par $(1, 0)$ et rencontrant la droite Δ d'équation $y = x$ en au moins un point distinct de $(0, 0)$ que de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) passant par $(0, 1)$.

c) En déduire le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) situés en dessous de Δ et ne rencontrant Δ qu'en $(0, 0)$.

3) Déterminer la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été constamment en tête.

Exercice n° 13 : (***) (le problème des allumettes de BANACH)

Une personne porte à tout moment deux boîtes d'allumettes, une dans la poche gauche, l'autre dans la poche droite. Chaque fois qu'elle a besoin d'une allumette, elle choisit au hasard dans une de ses boîtes. Elle découvre subitement que la boîte tirée est vide. Les deux boîtes contenaient initialement n allumettes chacune.
Quelle est la probabilité qu'il lui reste k allumettes dans l'autre boîte ?
Quand $n = 6$, combien reste-t-il d'allumettes dans la poche non vide en moyenne ?

º 38. Probabilités : corrigé

Exercice nº 1

L'univers Ω est dans les deux cas $\Omega = \{(F,F),(F,G),(G,F),(GG)\}$. Les événements élémentaires sont équiprobables.

• **Famille Jones.** L'événement « l'ainée est une fille » est l'événement $A = \{(F,F),(F,G)\}$ avec $p(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

L'événement « les deux enfants sont des filles » est l'événement $B = \{(F,F)\}$ avec $p(B) = \dfrac{1}{4}$. La probabilité demandée est

$$p_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

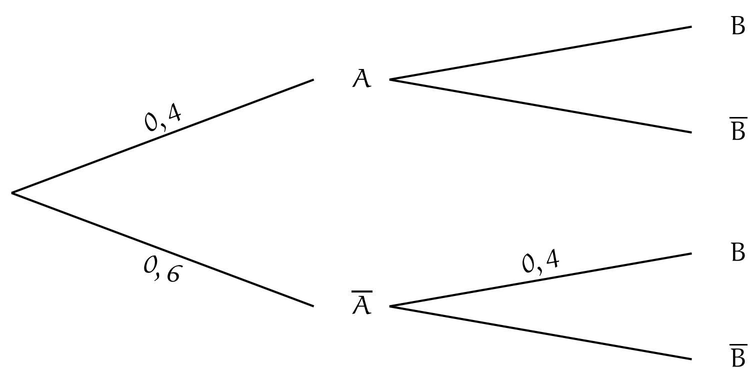
• **Famille Smith**. L'événement « l'un des deux enfants est un garçon » est l'événement $C = \{(G,G),(G,F),(F,G)\}$ avec $p(C) = \dfrac{3}{4}$.

L'événement « les deux enfants sont des garçons » est l'événement $D = \{(G,G)\}$ avec $p(D) = \dfrac{1}{4}$. La probabilité demandée est

$$p_C(D) = \frac{p(D \cap C)}{p(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Exercice nº 2

Représentons la situation par un arbre de probabilités.



• $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B)$ et donc $0,6 = 0,4 \times p_A(B) + 0,6 \times 0,4$ puis

$$p_A(B) = \frac{0,6 - 0,6 \times 0,4}{0,4} = 0,9.$$

• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$ puis

$$p(A \cup B) = P(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,6 - 0,36 = 0,64.$$

• $p_{\overline{B}}(A) = \dfrac{p(A) \times p_A(\overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{0,4(1-0,9)}{1-0,6} = 0,1.$

Exercice nº 3

1) L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments. Les événements élémentaires sont équiprobables.

$$\text{card}(\Omega) = \binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 8 \times 31 \times 29 \times 28 = 201\ 376.$$

Il y a ainsi $201\ 376$ cas possibles. Pour les cas favorables, on tire 3 cartes parmi les 8 cœurs et 2 cartes parmi les 24 qui ne sont pas des cœurs. Au total, il y a

$$\binom{8}{3} \times \binom{24}{2} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times \frac{24 \times 23}{2} = 56 \times 12 \times 23 = 15\ 456.$$

Il y a $15\ 456$ mains de 5 cartes contenant exactement 3 cœurs. La probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs est donc

$$p = \frac{15\ 456}{201\ 376} = \frac{56 \times 12 \times 23}{8 \times 31 \times 29 \times 28} = \frac{3 \times 23}{31 \times 29} = \frac{69}{899} = 0,076\ldots$$

2) L'univers Ω est ici l'ensemble des tirages successifs sans remise de 5 éléments dans un ensemble à 32 éléments. Les événements élémentaires sont équiprobables.

$$\text{card}(\Omega) = 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 = 24\ 165\ 120.$$

Il y a ainsi 24 165 120 cas possibles. Pour les cas favorables, on choisit d'abord l'emplacement des cœurs. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ emplacements des 3 cœurs. Pour chacun des ces emplacements, il y a $8 \times 7 \times 6$ choix des cœurs et 24×23 choix des cartes qui ne sont pas des cœurs. Le nombre de cas favorables est donc

$$\binom{5}{3} \times (8 \times 7 \times 6) \times (24 \times 23) = 1\ 854\ 720.$$

Il y a 1 854 720 tirages successifs sans remise de 5 cartes contenant exactement 3 cœurs. La probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs est donc

$$p = \frac{1\ 854\ 720}{24\ 165\ 120} = \frac{10 \times (8 \times 7 \times 6) \times (24 \times 23)}{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28} = \frac{3 \times 23}{31 \times 29} = \frac{69}{899} = 0,076\ldots$$

On note que la probabilité ne change pas.

3) L'univers Ω est ici l'ensemble des tirages successifs avec remise de 5 éléments dans un ensemble à 32 éléments. Les événements élémentaires sont équiprobables.

$$\text{card}(\Omega) = 32^5 = 33\ 554\ 432.$$

Il y a ainsi 33 554 432 cas possibles. Pour les cas favorables, on choisit d'abord l'emplacement des cœurs. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ emplacements des 3 cœurs. Pour chacun des ces emplacements, il y a 8^3 choix des cœurs et 24^2 choix des cartes qui ne sont pas des cœurs. Le nombre de cas favorables est donc

$$\binom{5}{3} \times 8^3 \times 24^2 = 2\ 949\ 120.$$

Il y a 2 949 120 tirages successifs avec remise de 5 cartes contenant exactement 3 cœurs. La probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs est donc

$$p = \frac{2\ 949\ 120}{33\ 554\ 432} = 0,087\ldots$$

On note que la situation du 3) est en fait un schéma de Bernoulli.

Exercice n° 4

Pour avoir les idées claires, on différencient les boules de même couleur en écrivant des numéros sur ces boules, ce qui ne change rien aux probabilités à calculer. Les sept boules de l'urne sont alors B1, B2, B3, B4, N1, N2 et N3.
On peut prendre pour univers Ω l'ensemble des tirages successifs sans remise de 3 éléments dans un ensemble à 7 éléments. Les événements élémentaires sont équiprobables.

$\text{car}(\Omega) = A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$. Pour les cas favorables, il y a $4 \times 3 = 12$ tirages des deux premières boules tels que ces deux premières boules soient blanches et pour chacun de ces tirages, il y a 3 possibilités que la troisième boule soit noire. Au total, $4 \times 3 \times 3 = 36$ cas favorables. La probabilité demandée est

$$\frac{4 \times 3 \times 3}{7 \times 6 \times 5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35} = 0,17\ldots$$

Exercice n° 5

La probabilité de ne rien gagner est $p_n = \dfrac{\binom{30-n}{2}}{\binom{30}{2}} = \dfrac{(30-n)(29-n)}{30 \times 29} = \dfrac{n^2 - 59n + 870}{870}$.

$$\begin{aligned}1 - p_n \geqslant 0,9 &\Leftrightarrow \frac{n^2 - 59n + 870}{870} \leqslant 0,1 \Leftrightarrow n^2 - 59n + 783 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{59 - \sqrt{349}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{59 + \sqrt{349}}{2}\\ &\Leftrightarrow 20,1\ldots \leqslant n \leqslant 38,8\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 21.\end{aligned}$$

A partir de 21 billets gagnants, on a au moins 9 chances sur 10 de gagner.

Exercice n° 6

Les résultats de l'expérience sont des couples où la première composante est le numéro obtenu sur le dé noir et la deuxième composante est le numéro obtenu sur le dé blanc. On peut donc prendre $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ puis $\text{card}(\Omega) = 36$.

• $p(A) = \dfrac{3\times 6}{6\times 6} = \dfrac{1}{2}$, $p(B) = \dfrac{6\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{2}$ et $p(C) = \dfrac{6\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{2}$.

• $p(A\cap B) = \dfrac{3\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{4} = p(A)\times p(B)$, $p(A\cap C) = \dfrac{3\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{4} = p(A)\times p(C)$ et $p(B\cap C) = \dfrac{3\times 3}{6\times 6} = \dfrac{1}{4} = p(B)\times p(C)$.
Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

• $A\cap B\cap C = \varnothing$ et donc $p(A\cap B\cap C) = 0 \neq \dfrac{1}{8} = p(A)\times p(B)\times p(C)$. A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice n° 7

Ω est l'ensemble des permutations de l'ensemble des entiers de 1 à $2n$. $\text{card}(\Omega) = (2n)!$ et les événements élémentaires sont équiprobables.
Pour les cas favorables, il y a $n!$ possibilités pour les n premiers cartons et pour chacune de ces possibilités, il y a $n!$ possibilités pour les n derniers. Il y a donc $n!\times n! = n!^2$ cas favorables. La probabilité demandée est

$$p = \frac{n!\times n!}{(2n)!} = \frac{1}{C_{2n}^n}.$$

Exercice n° 8

1) $p = \dfrac{C_2^2\times C_{30}^1}{C_{32}^3} = \dfrac{30}{32\times 31\times 5} = \dfrac{3}{16\times 31} = \dfrac{3}{496} = 0,006\ldots$

2) Avec 4 cartes, $p = \dfrac{C_2^2\times C_{30}^2}{C_{32}^4} = \dfrac{\dfrac{30\times 29}{2}}{\dfrac{32\times 31\times 30\times 29}{4\times 3\times 2}} = \dfrac{4\times 3}{32\times 31} = \dfrac{3}{8\times 31} = \dfrac{3}{248} = 0,01\ldots$

Avec 5 cartes, $p = \dfrac{C_2^2\times C_{30}^3}{C_{32}^5} = \dfrac{\dfrac{30\times 29\times 28}{3\times 2}}{\dfrac{32\times 31\times 30\times 29\times 28}{5\times 4\times 3\times 2}} = \dfrac{5\times 4}{32\times 31} = \dfrac{5}{8\times 31} = \dfrac{5}{248} = 0,02\ldots$

3) Avec n cartes, $3\leqslant n\leqslant 32$, $p = \dfrac{C_2^2\times C_{30}^{n-2}}{C_{32}^n} = \dfrac{\dfrac{30!}{(n-2)!(32-n)!}}{\dfrac{32!}{n!(32-n)!}} = \dfrac{n(n-1)}{32\times 31}$ puis

$$p_n \geqslant 0,5 \Leftrightarrow n(n-1)\geqslant 496 \Leftrightarrow n^2-n-496\geqslant 0 \Leftrightarrow n\geqslant \frac{1+\sqrt{1985}}{2} \Leftrightarrow n\geqslant 22,7\ldots \Leftrightarrow n\geqslant 23.$$

A partir de 23 cartes tirées, on a au moins une chance sur deux de se rendre compte de la supercherie.

Exercice n° 9

1) a) Quand $n = 0$, la particule est initialement en 0 et s'arrête donc immédiatement en 0 avec certitude. Donc $q_0 = 1$.
Quand $n = N$, la particule s'arrête immédiatement en N avec certitude et donc ne s'arrête pas en 0 avec certitude. Donc $q_N = 0$.

b) Si on note A_n l'événement la particule est en n, A_n est la réunion disjointe des événements « la particule va en $n+1$ et s'arrête en 0 » et de l'événement « la particule va en $n-1$ et s'arrête en 0 »de probabilités respectives $p\times q_{n+1}$ (produit de la probabilité d'aller vers la droite et donc d'arriver en $n+1$ par la probabilité de s'arrêter en 0 sachant qu'on est en $n+1$) et $q\times q_{n-1}$. Donc, $q_n = p\times q_{n+1} + q\times q_{n-1}$.

c) Pour tout $n\in[\![1,N-1]\!]$, on a $pq_{n+1} - q_n + qq_{n-1} = 0$. L'équation caractéristique associée est $pz^2 - z + (1-p) = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1-4p(1-p) = 4p^2-4p+1 = (2p-1)^2$.

1er cas. Si $p\neq\dfrac{1}{2}$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes à savoir $\dfrac{1\pm|2p-1|}{2p} = \dfrac{1\pm(2p-1)}{2p}$ ou encore 1 et $\dfrac{1}{p}-1$. On sait qu'il existe λ et μ tels que pour tout $n\in[\![0,N]\!]$, $q_n = \lambda+\mu\left(\dfrac{1}{p}-1\right)^n = \lambda+\mu\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

Les conditions $q_0 = 1$ et $q_N = 0$ fournissent $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu = 1\\ \lambda+\mu\left(\dfrac{q}{p}\right)^N = 0\end{array}\right.$ et donc $\lambda = -\dfrac{q^N}{p^N-q^N}$ et $\mu = \dfrac{p^N}{p^N-q^N}$ puis

$$q_n = -\frac{q^N}{p^N-q^N} + \frac{p^N}{p^N-q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

2ème cas. Si $p = \dfrac{1}{2}$, l'équation caractéristique admet une solution réelle double à savoir 1. On sait qu'il existe λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $q_n = \lambda + \mu n$. Les conditions $q_0 = 1$ et $q_N = 0$ fournissent

$$q_n = \frac{n-N}{-N} = 1 - \frac{n}{N}.$$

2) De nouveau,

1er cas. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $p_n = \lambda + \mu \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

Les conditions $p_0 = 0$ et $p_N = 1$ fournissent $\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \mu \left(\dfrac{q}{p}\right)^N = 1 \end{array}\right.$ et donc $\lambda = \dfrac{p^N}{p^N - q^N}$ et $\mu = -\dfrac{p^N}{p^N - q^N}$ puis

$$p_n = \frac{p^N}{p^N - q^N} - \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n.$$

2ème cas. Si $p = \dfrac{1}{2}$, il existe λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $p_n = \lambda + \mu n$. Les conditions $p_0 = 0$ et $p_N = 1$ fournissent

$$p_n = \frac{n}{N}.$$

3) $p_n + q_n = \left\{\begin{array}{l} 1 - \dfrac{n}{N} + \dfrac{n}{N} \text{ si } p = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{(1-p)^N}{p^N - q^N} + \dfrac{p^N}{p^N - q^N}\left(\dfrac{q}{p}\right)^n + \dfrac{p^N}{p^N - q^N} - \dfrac{p^N}{p^N - q^N}\left(\dfrac{q}{p}\right)^n \text{ si } p \neq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. = 1.$

La probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais est $1 - (p_n + q_n) = 0$.

Exercice n° 10

1) Formule de Bayes.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$.
Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque $P(B) \neq 0$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)}.$$

Puisque $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(A_j) \neq 0$, on a

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B).$$

Donc,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

2) a) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements. On a $P(A) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

D'après la formule de BAYES,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\frac{1}{2}$.

b) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient n fois le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements. On a toujours $P(A) = \frac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \frac{1}{2^n}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6^n}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n} \neq 0.$$

D'après la formule de BAYES,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. Ceci signifie que si au bout d'un grand nombre de lancers, on a obtenu à chaque fois le 6, il est quasiment sûr que le dé est pipé.

Exercice n° 11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement « au n-ème tirage, la boule provient de l'urne U_1 » (l'événement $\overline{A_n}$ est donc l'événement « au n-ème tirage, la boule provient de l'urne U_2 »).

1) $\left(A_1, \overline{A_1}\right)$ est un système complet d'événements et $P(A_1) = P\left(\overline{A_1}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = P(B_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_1) + P\left(\overline{A_1}\right) \times P_{\overline{A_1}}(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{35}.$$

La probabilité p_1 que la première boule tirée soit blanche est $\frac{17}{35}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(B_n, \overline{B_n}\right)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P\left(\overline{B_n}\right) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{4}{7} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

3) La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.

La fonction affine $x \mapsto -\frac{6}{35} x + \frac{4}{7}$ admet un point fixe et un seul :

$$x = -\frac{6}{35} x + \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{41}{35} x = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{20}{41}.$$

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} - \frac{20}{41} = -\frac{6}{35}\left(p_n - \frac{20}{41}\right)$ puis que pour tout entier naturel non nul n,

$$p_n - \frac{20}{41} = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{20}{41}\right) = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right) = -\frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1},$$

et donc

$$p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}.$$

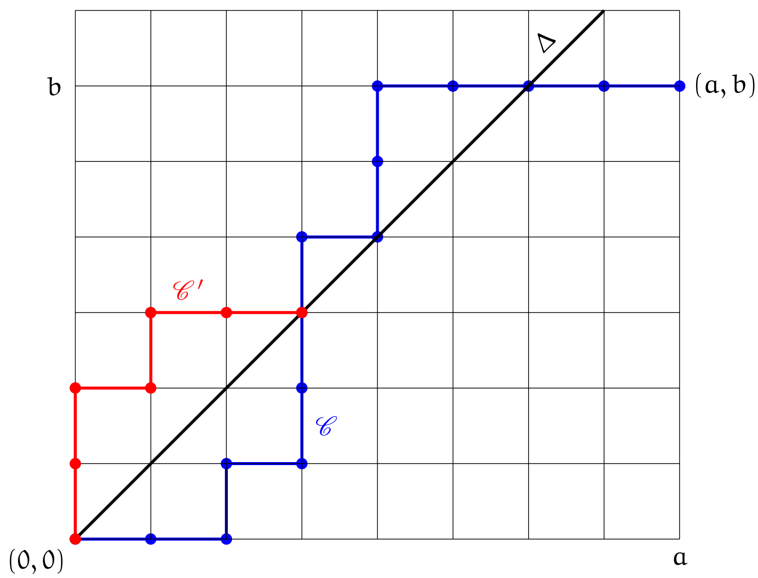
Pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \dfrac{20}{41} - \dfrac{3}{1435} \times \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1}$.

Exercice n° 12

1) Un chemin de (α, β) à $(\alpha+m, \beta+n)$ « est » un mot de $m+n$ lettres comportant m lettres D (pour droite) et n lettes H (pour haut) du type DHHDDDH...H. Le nombre de ces chemins est le nombre de choix des emplacements des m lettres D dans les $m+n$ positions. Il y en a $\dbinom{m+n}{m} = \dfrac{(m+n)!}{m!n!}$.

2) a) Soit $\mathscr{C}$ un chemin allant de $(1,0)$ à (a,b). Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des abscisses x des points (x,y) de $\mathscr{C}$ tels que $x \leqslant y$. $\mathscr{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $0 \in \mathscr{E}$) et majorée (par a). Donc $\mathscr{E}$ admet un plus grand élément. Notons le c.
De même, on peut définir d la plus grande ordonnée d'un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse c. Par construction, $c \leqslant d$. c n'est pas a car $a > b \geqslant d$ et donc $c \leqslant a-1$. Par définition de c et d, le point de $\mathscr{C}$ qui suit (c,d) est $(c+1,d)$ avec $c+1 > d$. Ainsi, $c \leqslant d$ et $c > d-1$. On en déduit que $c = d$. Par construction le point (c,c) est un point de $\mathscr{C}$ et de Δ.

b) Notons E l'ensemble des chemins de $(0,0)$ à (a,b), passant par $(1,0)$ et rencontrant la droite Δ d'équation $y = x$ en au moins un point distinct de $(0,0)$ et F l'ensemble des chemins de $(0,0)$ à (a,b) passant par $(0,1)$. On va construire une bijection de E sur F.



Soit $\mathscr{C}$ un élément de E. On note $\mathscr{C}_1$ la partie de $\mathscr{C}$ qui va de $(0,0)$ au premier point de $\mathscr{C}$ autre que $(0,0)$ qui se trouve sur Δ puis $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1$. $\mathscr{C}$ ne rencontre pas Δ en (a,b) (car $a > b$) et donc $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un point distinct de $(0,0)$ strictement avant (a,b). Donc $(a,b) \in \mathscr{C}_2$ et en particulier, $\mathscr{C}_2 \neq \varnothing$. De même, $(0,0)$ et $(1,0)$ appartiennent à $\mathscr{C}_1$ et donc $\mathscr{C}_1 \neq \varnothing$.
Notons alors $\mathscr{C}_1'$ le symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à Δ et enfin $\mathscr{C}' = \mathscr{C}_1' \cup \mathscr{C}_2$. Puisque $(1,0) \in \mathscr{C}_1$, $(0,1) \in \mathscr{C}_1'$ et donc $\mathscr{C}' \in F$.

On considère $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \mathscr{C} & \mapsto & \mathscr{C}' \end{array}$. D'après ce qui précède, f est une application de E vers F.

De même, on peut considérer $g : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ \mathscr{C} & \mapsto & \mathscr{C}' \end{array}$. D'après a), un chemin $\mathscr{C}$ de F a nécessairement un point commun avec Δ autre que $(0,0)$. On peut lui appliquer la transformation précédente et on obtient un chemin $\mathscr{C}'$ de E.
Pour tout chemin $\mathscr{C}$ de E, on a $g(f(\mathscr{C})) = \mathscr{C}$ et pour tout chemin $\mathscr{C}'$ de F, on a $f(g(\mathscr{C}')) = \mathscr{C}'$. Donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
On sait alors que f est bijective. En particulier, $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$.

c) Un chemin de $(0,0)$ à (a,b) situé en dessous de Δ passe par $(1,0)$. Le nombre total de chemins de $(0,0)$ à (a,b) passant par $(1,0)$ est encore le nombre total de chemins de $(1,0)$ à (a,b). Il y en a $\dbinom{a+b-1}{a-1}$ d'après la question 1). Le nombre de chemins de $(0,0)$ à (a,b) situés en dessous de Δ est la différence entre $\dbinom{a+b-1}{a-1}$ et le nombre de chemin passant par

$(1,0)$ et rencontrant Δ en au moins un point distinct de $(0,0)$ à savoir $\text{card}(E)$. D'après la question b), $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ et donc le nombre cherché est

$$\binom{a+b-1}{a-1} - \text{card}(E) = \binom{a+b-1}{a-1} - \text{card}(F) = \binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}.$$

3) En représentant chaque étape du dépouillement par un couple (x,y) où x est le nombre de voix de A et y est le nombre de voix de B, un dépouillement « est » un chemin de $(0,0)$ à (a,b) et un dépouillement où A est constamment en tête « est » est un chemin de $(0,0)$ à (a,b) situé en dessous de Δ et ne rencontrant Δ qu'en $(0,0)$. La probabilité demandée est donc

$$p = \frac{\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}} = \left(\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!} - \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}\right)\frac{a!b!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Exercice n° 13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in [\![1,n]\!]$.

Supposons par exemple que la personne se rende compte que la boîte d'allumettes qui est dans sa poche gauche est vide. A chaque étape, on peut représenter le nombre d'allumettes de chaque boîte par un couple (x,y) où x est le nombre d'allumettes prises dans la poche gauche et y est le nombre d'allumettes de la poche droite.

Prendre une allumette à la fois dans l'une ou l'autre poche consiste à ajouter 1 à x ou à y et donc à faire un déplacement d'une unité vers la droite ou vers le haut. On veut prendre n allumettes dans la poche gauche et $n-k$ dans la poche droite (pour qu'il en reste k) et donc on veut atteindre le point $(n, n-k)$. Tout ceci permet d'identifier une succession de prises d'allumettes nous laissant une boîte vide à gauche et une boîte contenant k allumettes à droite à un chemin joignant le point $(0,0)$ au point $(n, n-k)$ comme dans l'exercice précédent.

On se rend compte que la boîte de la poche gauche est vide en effectuant un déplacement supplémentaire vers la droite. Le nombre de prises d'allumettes cherché est donc le nombre de chemins joignant $(0,0)$ à $(n+1, n-k)$ et se terminant par un déplacement vers la droite. Il y en a autant que de chemins joignant $(0,0)$ à $(n, n-k)$ à savoir $\binom{2n-k}{n}$. Un chemin joignant $(0,0)$ à $(n+1, n-k)$ est de longueur $2n-k+1$. Comme à chaque étape, la probabilité de choisir une des deux boîtes est $\frac{1}{2}$ et que les choix successifs sont mutuellement indépendants, la probabilité d'un tel chemin est $\frac{1}{2^{2n-k+1}}$. La probabilité qu'on se rende compte que la boîte gauche est vide et que la boîte droite contient k allumettes est $\frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k+1}}$. Cette probabilité est la même si c'est la boîte droite qui est vide et la boîte gauche contient k allumettes. La probabilité demandée est

$$p = 2 \times \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k+1}} = \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}}.$$

En moyenne, il reste dans la poche pas vide $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}}$ ce qui s'écrit quand $n = 6$,

$$\sum_{k=1}^{6} k\frac{\binom{12-k}{6}}{2^{12-k}} = \frac{462}{2^{11}} + \frac{420}{2^{10}} + \frac{252}{2^9} + \frac{112}{2^8} + \frac{35}{2^7} + \frac{6}{2^6} = \frac{3958}{2048} = 1,9\ldots$$