Calculs Algébriques

John Neper, 1550-1617

Théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais, issu d'une riche famille, lui-même baron connu par sa défense du protestantisme. Les mathématiques n'étaient pas son activité principale mais il ne manquait pas d'idées pour simplifier les calculs. Il établit quelques formules de trigonométrie sphérique, popularisa l'usage du point pour la notation anglo-saxonne des nombres décimaux mais surtout inventa les logarithmes.

Blaque du jour

- Logarithme et exponentielle vont boire un café. Au moment de régler l'addition, qui paye ? C'est l'Exponentielle, parce que le Logarithme ne paye rien.
- L'exponentielle et le logarithme décimal vont au cinéma, qui choisit le film ? l'exponentielle, car le logarithme décide mal.

Exercice 1

❶ Montrer par deux méthodes différentes les égalités suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

❸ En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$.

❹ En déduire que :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}, \ \forall n \geqslant 0\,;$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \ \forall n \geqslant 1\,;$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1), \ \forall n \geqslant 0\,;$

Exercice 2 : Sommes telescopiques

Simplifier les sommes suivantes :

❶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$

❷ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.k!, \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$

❸ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$

Exercice 3

❶ Simplifier pour $n \geqslant 2$, le produit : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

❷ Montrer pour $n \geqslant 1$ que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

❸ Soit $n \geqslant 1$. Exprimer à l'aide des factorielles le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$.

❹ Montrer pour $n \geqslant 0$ que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3}$.

Exercice 4

En utilisant correctement la formule du binôme de Newton $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$,

simplifier les expressions suivantes :

❶ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

❷ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k}$.

Exercice 5 : Sommes doubles

❶ Simplifier les sommes suivantes :

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)^2$.
- $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}$, $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}i\binom{n}{j}x^j$.
- $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{n}{j}\binom{i}{j}$.

❶ **Formule d'inversion de Mobius** : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient x_i, y_i des réels vérifiant :

$y_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_i$, $\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n$. Montrer alors que : $x_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}y_i$, $\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 6

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$.

FIN