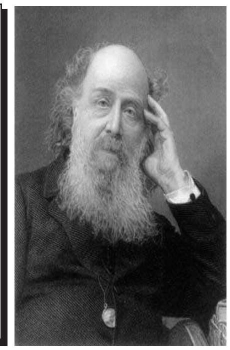
Feuille d'exercices: *Déterminants*

Mathématicien du jour ***Sylvester***

James Joseph Sylvester, mathématicien et géomètre anglais (1814-1897). Il a introduit en 1850 le terme de matrice, ainsi que la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$.
Il a reçu la Royal Medal et la Médaille Copley. En 1901, la Médaille Sylvester de la Royal Society a été créée en son honneur.

Blague du jour :
Une jeune fille qui explique à ses parents, qu'il ne va épouser qu'un archéologue.
- Parce que plus on vieillit, plus il vous aime.



Exercice 1 **. Changements de signe.**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **et** $B = ((-1)^{i+j}a_{ij})$**. Montrer que** $\det A = \det B$**.**

Exercice 2 **. Matrice de Van Der Monde.**
Soient $a_1, \ldots, a_n$ **des réels deux à deux distincts, on pose** $V(a_1, \ldots, a_n) = \left(a_i^{j-1}\right)_{1 \le i,j \le n}$ **et** $P(X) = \det\left(V(a_, \ldots, a_{n-1}, X\right)$**.**

1) **Montrer que** $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$**.**
   Indication : Développer le déterminant suivant le dernière colonne.
2) **Préciser son coefficient dominant.**
3) **Calculer** $P(a_i)$**.**
4) **En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de** $P(X)$ **.**
5) **Calculer le déterminant de la matrice de Van Der Monde** $\left(a_i^{j-1}\right)_{1 \le i,j \le n}$
6) **A quelle condition la matrice est inversible.**

Exercice 3 **. Formule d'intégration numérique et matrice de Van Der Monde :**

1) **Soit** $a_1, \ldots, a_n$ **des réels deux à deux distincts,** a, b **deux réels donnés. Montrer que :** $\exists (x_, \ldots, x_n)$ **tel que** $\displaystyle\int_a^b P(t)\mathbf{d}t = \sum_{k=1}^{n} x_k P(a_k)$**.**
2) **Trouver trois réels** α, β, γ **tels que pour tout polynôme de degré** ≤ 2 **on ait :** $\displaystyle\int_2^4 P(t)dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$

Exercice 4 **. Matrice de Van Der Monde et polynômes d'interpollation de Lagrange.**
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$

$\mathcal{B}_1 = (1, X, \ldots, X^{n-1}); \mathcal{B}_2 = (L_1, \ldots, L_n)$.

1) **Calculer $L_i(a_j)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.**
2) **En déduire que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, appelée la base d'interpolation de Lagrange aux points $a_1, \ldots, a_n$.**
3) **Montrer que** $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]; \quad P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k(X)$ **.**
4) **En déduire que** $P_{\mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_1} = V(a_1, \ldots, a_n)$ **.**
   Conclure $V(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible .
5) **On pose** $M = V(a_1, \ldots, a_n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, **et**

   $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k X^{k-1}$.

   a) **Montrer que** $MX = 0 \Longleftrightarrow P(a_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq n$.
   b) **En déduire que $V(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible.**
6) **Écrivez le déterminant :** $\det\Big(\cos((j-1)\theta_i)_{1 \leq i,j \leq n}\Big)$ **sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.**

Exercice 5 **. Calculer les déterminants suivants, en essayant de trouver des relation de récurrence.**
On pourra suivre les indications données pour chaque matrice.

1) **Déterminant tridiagonale :** $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & b \\ 0 & \ldots & 0 & b & a \end{vmatrix}$

   a, b des réels fixes.
   Indication : Développer suivant le 1ère ligne ou 1ère colonne
2) **Déterminant de Cauchy :**

$$C_n = C(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = \left| \frac{1}{a_i + b_j} \right|_{1 \leq i,j \leq n}$$

   $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels donnés.
   Indication : Utiliser les opérations élémentaires suivantes : $L_i \longrightarrow L_i - L_1$, pour tout $2 \leq i \leq n$.
3) **Déterminant de Van Der Monde :**

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \left| a_i^{j-1} \right|_{1 \leq i,j \leq n}$$

   $a_1, \ldots, a_n$ des réels donnés.
   Indication : Utiliser les opérations élémentaires suivantes : $C_n \longrightarrow C_n - a_1 C_{n-1}, \ldots, C_2 \longrightarrow C_2 - a_1 C_1$.

Exercice 6 . **Soit** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **et** $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1) **Démontrer que :** $\det(A + \alpha U) = \det A + \alpha \sum$ **cofacteurs de** A.

2) **Soit** $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, **on pose :** $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$,

   a) **Montrer que :** $D(a-b, 0, c-b) = (a-b)^n$
   $D(a-c, b-c, 0) = (a-c)^n$

   b) **On suppose que** $b \neq c$, **montrer que :**
   $D(a, b, c) = \dfrac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$.

   c) **On suppose que** $b = c$, **montrer que :**
   $\det((a-b)I + bU) = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1}$.

Exercice 7 . **Pour tout** $p \in \mathbb{N}$ **et** $x \in \mathbb{R}$ **on pose :**

$$\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & \dots & 0 & x \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & x^2 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \binom{p}{p-1} & x^p \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \dots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$$

1) **Préciser le nombre de lignes et de colonnes de** $\varphi_p(x)$.
Calculer $\varphi_p(x+1) - \varphi_p(x)$.

2) **En déduire que** $\varphi_p(n+1) = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} k^p$, **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$.

3) **En déduire les valeurs des sommes suivantes :**
$\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ **et** $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 8 .

1) **Soient** $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **telles que** $AB = BA$. **Montrer que** $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
Indication : Penser à travailler dans $\mathbb{C}$.

2) **Chercher** A, B **ne commutant pas telles que** $\det(A^2 + B^2) < 0$.
Indication : Utiliser : $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 . **Sommes des autres colonnes.**
Soit M **une matrice carrée d'ordre** n, **et** M' **la matrice déduite de** M **en remplaçant, pour tout** j, **la** j**-ième colonne par la somme des autres colonnes de** M
Montrer que $\det M' = (-1)^{n-1}(n-1) \det M$.

Exercice 10 **. Racines de l'unité.**

On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\alpha = e^{\frac{i\pi}{n}}$ **et** D **le déterminant** $n \times n$ **:**
$D = \det\left(M = \left(\omega^{(k-1)(j-1)}\right)_{1 \leq k,j \leq n}\right)$.

1) **Calculer** $M\overline{M}$**, en déduire que** M **est inversible, puis donner son inverse.**
2) **Pour tout** $0 \leq k \leq n-1$**, calculer** $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj}$
3) **En déduire la matrice** M^2**, puis que** $D^2 = \varepsilon n^n$**, avec** $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
4) **Montrer que** $D = \displaystyle\prod_{j<k}(\omega^k - \omega^j) = \prod_{j<k}\left(\alpha^{j+k} \cdot 2i \sin\frac{k-j}{n}\pi\right)$.
5) **En déduire que** $D = n^{n/2} \exp\left(i\dfrac{\pi}{4}(n-1)(3n+2)\right)$.

Exercice 11 **. Autour de la Comatrice.**

1) **Soit** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **triangulaire supérieure.**
   a) **On suppose que** A **est inversible.**
   Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$**, associé à** A **dans la base canonique** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$**, on pose** $F_k = Vect(e_1, \cdots, e_k)$ **pour tout** $k \in \{1, \ldots, n\}$.
      i. **Montrer que** $f(F_k) = F_k$.
      ii. **En déduire que** $f^{-1}(F_k) = F_k$.
      iii. **En déduire que** A^{-1} **est triangulaire supérieure.**
      iv. **En déduire que** $com(A)$ **est triangulaire inférieure.**
   b) **On suppose que** A **est non inversible.**
   Soit $\alpha = \min\{|\lambda|$ **tel que** λ **valeur propre non nulle de** $A\}$
      i. **Montrer que** $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$**, on a** $A - \varepsilon I_n$**, non inversible.**
      ii. **En déduire que** $com(A)$ **est triangulaire inférieure.**
2) **Soit** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**. Étudier le rang de com**(A) **en fonction du rang de** A**. Montrer que :**
$$\begin{array}{lll} \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n & \text{si} & \mathrm{rg}(A) = n \\ \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1 & \text{si} & \mathrm{rg}(A) = n-1 \\ \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 0 & \text{si} & \mathrm{rg}(A) \leq n-2 \end{array}$$
3) **Calculer com** $(\mathrm{com}\, A)$ **dans le cas où** A **est inversible.**
4) **Si rg**$A \leq n-2$**, démontrer que com** $A = 0$.
5) **Si rg**$A = n-1$**, montrer que com** $A = U\,{}^tV$**, où** $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
6) **Soit** $n \geq 2$ **et** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) **Calculer com** (I_n) **et com** (λA).
   b) **Si** A **et** B **sont inversibles, démontrer que**
   com $(AB) = (\mathrm{com}\, A)(\mathrm{com}\, B)$ **et com** $(A^{-1}) = \mathrm{com}\,(A)^{-1}$.
   c) **Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires** λ **tels que** $A - \lambda I$ **et** $B - \lambda I$ **soient inversibles.**
   d) **En déduire que si** A **et** B **sont semblables, alors com** A **et com** B **le sont.**

Fin
à la prochaine