

FEUILLE D'EXERCICES : *Espaces vectoriels euclidiens*

Feuille d'Exercices

2016-2017

Exercice 1. Donner dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 la matrice de la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}(e_1 + 2e_2 + e_3, e_3)$.

Exercice 2.

1) Reconnaître les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de \mathbb{R} sont :

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2) Complétez la matrice

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$$

pour que A soit une matrice orthogonale positive puis donner la nature de la matrice A .

Exercice 3. Soit u un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée \mathcal{B} .

1) Montrer que $U^t U$ est la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u)$.

2) Trouver la matrice de la symétrie associée.

Exercice 4. E désigne un espace euclidien de dimension n . Soit $f : E \rightarrow E$ une application non nécessairement linéaire.

1) On suppose que f conserve le produit scalaire.

Démontrer que f est linéaire.

2) On suppose que f conserve les distances.

Démontrer que $f = f(0_E) + g$, avec $g \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 5. Soit $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $\vec{x} \in E$: $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} | \vec{v})\vec{v}$.

Déterminer λ pour que $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaître alors f .

Exercice 6. Montrer que les endomorphismes de \mathbb{R}^3 qui conservent le produit vectoriel sont exactement les rotations.

Exercice 7. Soit E espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments E , tous unitaires telle que :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \quad \forall x \in E$$

Montrer que c'est une base orthonormale de E .

Exercice 8. Formule du produit mixte.

Montrer que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a :

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$$

Exercice 9. Division vectorielle.

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

1) Soient \vec{a}, \vec{b} deux vecteurs donnés, $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Étudier l'équation : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$.

Indication : On cherchera une solution particulière de la forme $\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{y}$.

2) Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs donnés Trouver $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tels que

$$\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$\vec{v} = \vec{b} \wedge \vec{c}$$

$$\vec{w} = \vec{c} \wedge \vec{a}$$

Indication : calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exercice 10. Polynômes de Laguerre :

On pose pour n entier et x réel : $L_n(x) = (-1)^n e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$

1) Montrer que L_n est un polynôme, préciser son degré, ainsi que son coefficient dominant.

2) Donner L_0, L_1, L_2 .

3) Pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions polynomiales, on pose $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$.

Montrer que cet intégrale existe et qu'ainsi on muni $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire.

4) Montrer que si $k < n$ alors $[(x^n e^{-x})^{(k)}](0) = 0$.

5) En déduire que pour tout $k < n$ on a : $\langle L_k, L_n \rangle = 0$, puis que $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale.

6) Pour tout entier k , on pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$, justifier l'existence de cet intégrale, puis base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

7) En déduire $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 + at + b)^2 e^{-t} dt$.

Exercice 11. Polynômes de Tchebychev :

On pose pour n entier et $-1 \leq x \leq 1$, $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$.

1) Montrer que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.

2) Pour tous $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Montrer que cet intégrale existe et qu'ainsi on muni $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire.

3) Montrer que la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale.

Exercice 12. Inégalité de Ptolémée.

Soit E un espace euclidien. Pour $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

1) Montrer que f est une involution, $f^2 = \operatorname{id}_E$ et conserve les angles de vecteurs.

2) Montrer que : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}, \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$.

3) Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in E$. Montrer que :

$$\|\vec{a} - \vec{c}\| \|\vec{b} - \vec{d}\| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\| \|\vec{c} - \vec{d}\| + \|\vec{b} - \vec{c}\| \|\vec{a} - \vec{d}\|.$$

Indication : se ramener au cas $\vec{a} = \vec{0}$ et utiliser l'application f .

Exercice 13. Propriétés du produit vectoriel.

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Démontrer :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = 0$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{t}) = (\vec{u} | \vec{w})(\vec{v} | \vec{t}) - (\vec{u} | \vec{t})(\vec{v} | \vec{w})$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{t} + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]\vec{w}$$

Exercice 14. Étude de projections.

- 1) *Caractérisation des projections orthogonales.*
Soit E un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection.
Montrer que :
 p est une projection orthogonale $\iff \forall \vec{x} \in E, \|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$.
- 2) *Composition de projecteurs.*
Soient F, G deux sev d'un ev euclidien E tels que $F^\perp \perp G^\perp$.
On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G .
Montrer que $p_F + p_G - p_{F \cap G} = id_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F \cap G}$.
- 3) *Projecteurs commutant*
Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si $(Im(p) \cap Im(q))^\perp \cap Im(p)$ et $(Im(p) \cap Im(q))^\perp \cap Im(q)$ sont orthogonaux.

Exercice 15. Étude de symétries.

- 1) Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G .
Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.
- 2) Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G .
Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$.
- 3) Soient H, K deux hyperplans de E , et s_H, s_K les symétries associées.
Démontrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 16. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire suivant

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt,$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\begin{aligned} \varphi(P)(X) &= (X^2 - X)P''(X) + (2X - 1)P'(X) \\ s(P)(X) &= P(1 - X) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que φ, s définissent des endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- 2) Donner leurs matrices dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.
- 3) En déduire leurs valeurs propres, sont-ils bijectifs ? diagonalisables ?
- 4) Montrer que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \exists ! L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\deg(L_k) = k, co(L_k) = 1, \varphi(L_k) = k(k+1)L_k$.
- 5) Montrer que $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^n$ on a :
 $\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle$ et $\langle s(P), Q \rangle = \langle P, s(Q) \rangle$.
- 6) En déduire que (L_0, \dots, L_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 7) En utilisant c. Dire pourquoi les matrices de φ, s dans (L_0, \dots, L_n) sont symétriques, expliciter ensuite ces matrices.
- 8) Montrer que s est une réflexion, préciser par rapport à quel hyperplan.

Exercice 17. Matrice de Gram.

Soient $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n , et $\text{Gram}(x_1, \dots, x_p)$ leur matrice de Gram de type $p \times p$, dont les coefficients sont $\langle x_i, x_j \rangle$.

On pose $\Gamma(x_1, \dots, x_p) = \det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_p))$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

- 1)
 - a) Comparer $\text{rg}A$ et $\text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.
 - b) Préciser le type de la matrice A , ainsi que ses coefficients.
 - c) Montrer que ${}^tAA = \text{Gram}(x_1, \dots, x_p)$.
 - d) Montrer que $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$, en déduire que $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg} \text{Gram}(x_1, \dots, x_p)$.
- 2)
 - a) Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace x_k par $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.
 - b) Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $x \in E$.
Montrer que $d(x, F)^2 = \frac{\Gamma(x_1, \dots, x_n, x)}{\Gamma(x_1, \dots, x_n)}$.
- 3) On suppose dans cette question que \mathcal{B} une famille quelconque de E , vérifiant la relation suivante :

$$\forall cx \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2$$

- a) Démontrer que (e_1, \dots, e_n) est une base de E .
- b) Démontrer que : $\forall x, y \in E, (x | y) = \sum_{i=1}^n (x | e_i)(y | e_i)$.
- c) On note G la matrice de Gram de e_1, \dots, e_n .
Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.
- 4) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose dans cette question que \mathcal{B} une base quelconque de E .
Montrer que $\Gamma(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (\det u)^2 \Gamma(e_1, \dots, e_n)$.