My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'exercices : *Fonctions intégrables.*

Feuille d'Exercices
2016-2017

Exercice 1. *Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles cités.*

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$, *sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$, *sur* $]0,1[$.

3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$, *sur* $]0,+\infty[$, *où* α *paramètre réel.*

4) $f(x) = x^\alpha |\ln x|^\beta$, *sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$, *où* α,β *paramètres réels.* ***Intégrales de Bertrand.***

5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x}$ *et* $g(x) = \dfrac{1-x}{\ln x}$ *sur* $]0,1[$.

6) $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1) - \ln 2}{x^2-1}$ *et* $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1) - x\ln 2}{x^2-1}$.

Exercice 2. ***Intégrale de Gauss.***

1) *Montrer que* $\ln(1+x) \leq x$, *pour tout réel* $x > -1$.

2) *En déduire que* $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$, $\forall x \in [0,n[$.

3) *Montrer que,* $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$, *puis en déduire que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Indication : On pourra utiliser l'encadrement :
$\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$, *pour tout* $x \in [0,\sqrt{n}[$, *puis utiliser* ***exercices 5 et 6.***

Exercice 3. ***Comparaison entre somme et intégrale.***

1) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $x \mapsto x^n \ln x$ *est intégrable sur* $]0,1]$, *puis calculer* $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x$.

2) *Montrer que, la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{1-x}$, *est bornée sur* $]0,1[$ *puis intégrable.*

3) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*
$$\left|\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right| \leq \frac{M}{n+1} \text{ où } M = \sup_{]0,1[} |f|.$$
Indication : Utiliser la relation : $1 - x^n = (1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

4) *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.
Indication : On admet le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4. *Soit* $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continue telle que* f^2 *intégrable.*

1) *Montrer que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

2) *Intérpreter ce résultat.*

Exercice 5. *Étude d'une suite d'intégrales*.

1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) *Donner une relation entre* I_n *et* I_{n-1}, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :* $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) *Montrer que* J_n *est bien définie.*

b) *Donner une relation entre* J_n *et* J_{n-1}, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

c) *Exprimer* J_n *en fonction de* n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

d) *Donner un équivalent simple de* J_n, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
On pourra utiliser la relation de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

e) *Montrer que* $0 \leq J_n - I_n \leq \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

f) *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 6. *Intégrales de Wallis.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $w_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$.

1) *Donner une relation entre* w_n *et* w_{n-1}, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

2) *Exprimer* w_n *en fonction de* n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3) *Donner un équivalent simple de* w_n, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
On pourra utiliser la relation de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

4) *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} w_n$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 7. *La constante d'Euler*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\gamma_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1) *Montrer que* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est monotone bornée entre 0 et 1, donc converge, on notera* γ *sa limite, appelée constante d'Euler.*
Indication : Penser à utiliser le TAF, ou bien l'inégalité : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, *pour tout* $k \geq 2$.

2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :* $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t$.
Montrer que J_n *est bien définie.*
On admet dans la suite que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = -\gamma$, *qu'il est possible de montre à l'aide d'une intégration par parties ou changement variable.*

3) *On pose* $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x\,\mathrm{d}x$.

a) *Montrer que* K *est bien définie.*

b) *Montrer que* $\ln(1+x) \leq x$, *pour tout réel* $x > -1$.

c) *En déduire que* $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x}$, *pour tout* $x \in [0, n[$.

d) *Montrer que pour tout* $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$, *on a :* $x - x^2 \leq \ln(1+x)$.

e) *En déduire que pour tout*

$n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}]$ *on a :* $t + n\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \geq -\dfrac{t^2}{n}$

$n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}]$ *on a :* $-\dfrac{t^2}{n} \geq \ln\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)$

$n \geq 4, t \in [0, n]$ *on a :* $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \geq \mathrm{e}^{-t}\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)$

$n \geq 4, t \in [0, n]$ *on a :* $0 \leq \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leq \dfrac{t^2 \mathrm{e}^{-t}}{n}$

f) *En déduire que* $K = -\gamma$.