Feuille d'exercices : *Fractions rationnelles.*

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Exercice 1. *Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :*

1) $F(X) = \dfrac{1}{X^2\left(X^2-1\right)^2\left(X^2+1\right)^2}$.

On pourra utiliser la parité pour réduire les calculs.

2) $F(x) = \dfrac{1}{\left(X^3-1\right)^2}$.

On pourra remarquer que : $F(x) = F(jX)$.

3) $\dfrac{X^2-X+1}{X^2(1-X)^2}$.

On pourra remarquer que : $F(1-X) = F(X)$.

Exercice 2. *Simplifier les expressions :*

$$F(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(X+k)(X+k+1)(X+k+2)} \quad , \quad H(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

$$G(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(X+2^k)(X+2^{k+1})} \quad , \quad K(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2}$$

Exercice 3. .

1) *Calculer la dérivée n^{eme} de l'expression :* $\dfrac{1-t\cos(a)}{1-2t\cos(a)+t^2}$.

2) *Donner une primitive de :* $\dfrac{t^3}{(t^2-1)^2}$

Exercice 4. *Déterminer les réels p, q pour que les résidus de $\dfrac{X^2+pX+q}{\left(X^2-1\right)^2}$ aux pôles 1 et -1 soient nuls.*

Rappel : On rappelle que le résidu d'un pôle a est le coefficient de $\dfrac{1}{X-a}$ dans la partie polaire relative à ce pôle .

Exercice 5. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines $z_1, \ldots, z_n$ avec les multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. En utilisant la décomposition en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$, montrer que toute racine, z de P' est barycentre de $z_1, \ldots, z_n$, c'est à dire s'écrit sous la forme : $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$, avec $0 \leq \lambda_i \leq 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.*

Exercice 6. ***Partie polaire pour un pôle d'ordre 2.***

Soit $F(X) = \dfrac{1}{R(X)} = \dfrac{1}{(X-a)^2 Q(X)}$ avec $Q(a) \neq 0$.

1) *Montrer que la partie polaire de F en a s'écrit sous la forme :*

$$F_a(X) = \frac{1}{Q(a)(X-a)^2} - \frac{Q'(a)}{Q^2(a)(X-a)}$$

2) *En déduire que la partie polaire de F en a s'écrit sous la forme :*

$$F_a(X) = \frac{2}{R''(a)(X-a)^2} - \frac{2R'''(a)}{3R''^2(a)(X-a)}.$$

Fin.