

FEUILLE D'EXERCICES : *Intégration  
sur un segment*

Feuille d'Exercices

2016-2017

Dans tous les énoncés  $[a, b]$  désigne un segment de  $\mathbb{R}$  avec  $a \leq b$

**Exercice 1.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

dans les cas suivants :

- 1)  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .
- 2)  $f$  en escalier sur  $[a, b]$ .
- 3)  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$

**Exercice 2.** Soit  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continue non nulle telle que :

$$\int_0^\pi f(t) \sin(t) dt = \int_0^\pi f(t) \cos(t) dt = 0$$

Montrer que  $f$  s'annule au moins deux fois sur  $[0, \pi]$  en changeant de signe.

On pourra raisonner par l'absurde.

**Exercice 3.** Pour  $(p, q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $I_{p,q} = \int_0^1 (1 - t^p)^{\frac{1}{q}} dt$ .

A l'aide d'une intégration par parties puis un changement de variable, montrer que  $I_{p,q} = I_{q,p}$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que :  
 $f(a + b - t) = f(t), \quad \forall t \in [a, b]$ .

1) Montrer que  $\int_a^b t f(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$ .

2) Application :

Calculer  $\int_0^\pi \frac{t}{1 + \sin t} dt$ .

**Exercice 5.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ .

1) Etudier sur  $[0, b-a]$  les variations de la fonction  $G_a$  définie par :

$$G_a(x) = \int_x^{x+a} |t| dt.$$

2) En déduire  $\inf_{[0, b-a]} G_a$ .

3) En utilisant le changement de variable  $u = t + x$ , montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M_1(f) F_{b-a}(x+a) \quad \text{avec } M_1(f) = \sup_{[a,b]} |f'|.$$

4) En déduire que  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M_1(f) \frac{(b-a)^2}{4}$ .

5) Quand a-t-on l'égalité ?

**Exercice 6. Inégalité de Jensen.**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue convexe.

Démontrer que  $g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(f(t)) dt$ .

**Exercice 7.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\exists n \in \mathbb{N}$  vérifiant

$$\int_0^1 t^k f(t) dt = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

1) Montrer que  $\int_a^b P(t) f(t) dt = 0, \forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

2) Soit  $r_1, \dots, r_p$  les racines, distinctes de  $f$  dans  $[a, b]$  dans lesquels  $f$  change de signe.

Montrer que  $\prod_{k=1}^p (t - r_k) f(t)$  garde un signe constant dans  $[a, b]$ .

3) Conclure que  $f$  s'annule au moins  $n + 1$  fois dans  $[a, b]$  en changeant de signe.

**Exercice 8. Moyenne géométrique.**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right)$$

On pourra utiliser :  $\forall x \geq -\frac{1}{2}, x - x^2 \leq \ln x \leq x$ .

**Exercice 9. Maximum-minimum.**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Étudier la convergence des suites  $(a_n), (b_n)$  définies par :  $a_0 = a, b_0 = b$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \min(x, b_n) dx$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \max(x, a_n) dx$$

**Exercice 10.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que

$$\int_0^1 f = \frac{1}{2}. \text{ Montrer que } f \text{ possède un point fixe sur } [0, 1].$$

**Exercice 11.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

On pose  $g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$ . Montrer que  $g^{(n)} = f$ .

Penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

**Exercice 12. Irrationalité de  $\pi$  et de  $e$ .**

Soit  $(p, q, n) \in \mathbb{N}^{*3}$ , on pose  $P_n(X) = \frac{X^n(qX - p)^n}{n!}$ .

1) Préciser les racines de  $P_n$  ainsi que leurs multiplicités .

2) Montrer que  $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \forall 0 \leq k \leq 2n$ .

3) En déduire que  $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}, \forall 0 \leq k \leq 2n$ .

Penser à un changement de variable.

4) On suppose  $\pi \in \mathbb{Q}$  et on pose  $\pi = \frac{p}{q}$ .

a) En déduire de ce qui précède que  $\int_0^\pi P_n(t) \sin t dt \in \mathbb{Z}$ .

b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi P_n(t) \sin t dt = 0$ .

c) Conclure que la suite  $\left(\int_0^\pi P_n(t) \sin t dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est stationnaire en 0.

d) Déduire une contradiction, puis conclure.

5) En raisonnant cette fois sur  $\int_0^\pi P_n(t) e^t dt$ , montrer que  $e \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 13.** On pose  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 + \sin(x) \cos(x)}} dx$   
 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 + \sin(x) \cos(x)}} dx$

- 1) Calculer  $I + J$ .
- 2) Montrer que  $I = J$ .
- 3) En déduire  $I$  et  $J$ .

**Exercice 14.** Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on pose

$$f_0(x) = 1$$

$$f_{n+1}(x) = 2 \int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que les fonctions  $f_n$  sont bien définies.
- 2) Calculer  $f_1, f_2, f_3$ .
- 3) Montrer l'existence de deux suites réelles  $(a_n), (b_n)$  vérifiant  $f_n(x) = a_n x^{b_n}, \forall x \in [0, 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  
On donnera  $b_n$  en fonction de  $n$  et  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ .
- 4) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^n \ln a_n = - \sum_{k=1}^n 2^k \ln(1 - 2^{-k})$ .
- 5) Montrer que  $\forall x \in [0, 1] \quad 0 \leq -x - \ln(1 - x) \leq \frac{x^2}{2(1 - x)}$ .
- 6) En déduire que  $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad | -2^k \ln(1 - 2^{-k}) - 1 | \leq 2^{-k}$ , puis que  $\left| \ln a_n - \frac{n}{2^n} \right| \leq \frac{n}{2^n}$ .
- 7) En déduire pour tout  $x \in [0, 1]$  fixe, la limite de la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 15. Formule de la moyenne généralisée.**

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues,  $f$  positive.

- 1) Démontrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = g(c) \int_a^b f(t) dt$$

- 2) Si  $f$  ne s'annule pas, montrer que  $c \in ]a, b[$ .
- 3) Application : Soit  $f$  continue au voisinage de 0.

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt$ .

**Exercice 16.** Pour  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue on pose  $u_n = \int_0^1 f(t^n) dt$ , on se propose dans la suite d'étudier le comportement asymptotique de cette suite.

- 1) Donner  $u_n$  ainsi que sa limite dans les cas suivants :  
 $f(x) = x, \quad f(x) = x^\alpha, \text{ avec } \alpha \neq 0, \quad f(x) = x(1 - x)$ .

- 2) Dans la suite on considère  $f(x) = \frac{1}{1 + x}$ .

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n + 1}$ .

b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

- c) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$1 - u_n = \frac{1}{n} \left( \ln 2 - \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt \right)$$

d) Montrer que  $\int_0^1 \ln(1 + t^n) dt \leq \frac{1}{n + 1}$

- e) En déduire un encadrement de  $u_{10}$  à  $10^{-2}$  près.

**Exercice 17. Sommes de Riemann.**

Déterminer les limites des suites suivantes.

$$1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

$$2) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$3) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

$$4) \left(\sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n,$$

on pourra utiliser l'égalité :  $x \leq e^x - 1 \leq x + \frac{ex^2}{2}$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

$$5) \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

On pourra s'inspirer de l'exemple précédent.

$$6) \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn} \text{ pour } k \geq 2 \text{ fixé.}$$

$$7) \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \dots + \sqrt{(n-1)1}\right).$$

$$8) \sqrt{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)}.$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{3k\pi}{n}\right)}.$$

$$10) \sum_{k=1}^n \sqrt{k}. \text{ Donner un équivalent simple.}$$

$$11) \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n A_1 A_k.$$

Où  $A_1, A_2, \dots, A_n$  les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre 0 et rayon 1.

**Exercice 18. Méthode des rectangles aux milieux.**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$  et on pose :

$$a_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad a_{k+\frac{1}{2}} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2} \text{ et } I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+\frac{1}{2}}).$$

1) Donner une interprétation géométrique de  $I_n$ .

2) Montrer que  $\left| \int_{t=a}^b f(t) dt - I_n \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$  où  $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$ .

3) Comparer la rapidité de convergence de cette méthode avec celle des trapèzes.

**Exercice 19. Intégrales de Wallis.**

On note  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$ .

1) Comparer  $I_n$  et  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ .

2) En coupant  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  en  $[0, \alpha]$  et  $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$ , démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

3) Chercher une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$ .  
En déduire  $I_{2k}$  et  $I_{2k+1}$  en fonction de  $k$ .

4) Démontrer que  $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ .

5) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante

6) Démontrer que  $I_n \sim I_{n-1}$  et en déduire un équivalent simple de  $I_n$  puis de  $\binom{2n}{n}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 20. Calcul de primitives.**

La fonction	Sa primitive
$x^k \ln x$	$\frac{x^{k+1}}{k+1} \left(\ln x - \frac{1}{k+1}\right)$
$\ln(1+x^2)$	$x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x$

**Exercice 21. Calcul de primitives.**

1) Fractions rationnelles.

La fonction	Sa primitive
$\frac{1}{x^3 - 1}$	$\frac{1}{3} \ln x - 1  - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)$
$\frac{1}{(x^3 - 1)^2}$	$-\frac{2}{9} \ln x - 1  + \frac{1}{9} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{x}{3(x^3 - 1)}$

2) Fonctions trigonométriques.

La fonction	Sa primitive
$\frac{1}{\sin x \sin 4x}$	$-\frac{1}{4 \sin x} + \frac{1}{8} \ln \left  \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right  - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left  \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{1 + \sqrt{2} \sin x} \right $
$\frac{\tan x}{1 + \tan x}$	$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln  \cos x + \sin x $
$\cos x \sqrt{\cos 2x}$	$\frac{\sin x \sqrt{\cos 2x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} \sin x)$
$\frac{1}{\sin x + \sin 2x}$	$\frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) - \frac{2}{3} \ln  1 + 2 \cos x $

3) Radicaux.

La fonction	Sa primitive
$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$	$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2} \ln  2x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} $
$\frac{1}{2 + \sqrt{1 + x} + \sqrt{3 - x}}$	$\sqrt{1 + x} - \sqrt{3 - x} - \arccos\left(\frac{x - 1}{2}\right)$ poser $x = 1 + 2 \cos \varphi$

**Exercice 22.**  $\forall x > 0$ , on pose  $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$ .

1) Montrer que  $\forall x > 0$ ,  $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ , que peut-on alors dire à propos de la courbe de  $F$ .

2) Montrer que  $\forall x > 0$ ,  $F(x) = \arctan(x) \ln x - \int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$

3) Montrer que  $\lim_{0^+} F$  existe, et est finie.

On la note dans la suite par  $\int_1^0 \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$ , on ne cherchera pas à la calculer mais plutôt à en donner une valeur approchée.

On pose alors  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0$ ,  $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t dt$ .

4) Montrer que  $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2}$$

5) En déduire pour  $n \in \mathbb{N}, x \in ]0, 1]$  la majoration suivante :

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x)$$

6) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} I_k(x)$

7) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k + 1)^2}$ .

Montrer que  $\left| \int_1^0 \frac{\ln t}{1 + t^2} dt - u_n \right| \leq \frac{1}{(2n + 3)^2}$ .

8) En déduire un encadrement de  $\int_1^0 \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$  à  $10^{-2}$  près.

**Fin.**