My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Feuille d'exercices : *Calcul matriciel.*

Feuille d'Exercices

2016-2017

Exercice 1. .

1) *Soit* $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&1&0\\-2&-6&-1\end{pmatrix}$, *montrer que* A *est la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *d'une projection dont on precisera le noyau et l'image.*

2) *Donner la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *de la projection* p, *sur* D *parallelement à* π *où*

$D:\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y-z=0\end{cases}$ *et* $\pi : x+y-z=0$.

Indication : Poser $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $p(X)=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, *utiliser les relation* $p(X)\in\ Im\ (p)=D, p(X)-X\in\ Ker\ (p)=\pi$ *pour trouver des relation entre* x',y',z' *et* x,y,z *puis en déduire la matrice de* p

3) *Soit* P *la matrice d'un projecteur sur un ev de dimension finie montrer que* $rg(P)=\mathrm{Tr}(P)$

Indication : chercher une base où sa matrice s'exprime d'une façon simple .

Exercice 2. .

Soient $A=\begin{pmatrix}29&38&-18\\-11&-14&7\\20&27&-12\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}7&-8&4\\3&-3&2\\-3&4&-1\end{pmatrix}$.

Montrer que A *et* B *ont même rang, même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer* $(A-I)^2$ *et* $(B-I)^2$*).*

Exercice 3. .

1) *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&1\\0&\dots&&\dots&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *associée à un endomorphisme* f *d'un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel ,* E, *de dimension* n, *dans une base* $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

a) *Calculer* $f(e_k)$, *pour tout* $1\le k\le n$.

b) *En déduire* $f^2(e_k)$, *pour tous* $1\le k\le n$, *puis la forme de la matrice* A^2.

c) *En déduire* $f^p(e_k)$, *pour tous* $1\le k,p\le n$, *puis la forme de la matrice* A^p.

d) *En déduire que* $f^n=0$, *puis que* $A^n=0$.

2) *Inversement soit* f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel ,* E, *de dimension* n *tel que* $f^n=0$ *et* $f^{n-1}\neq 0$.

a) *Justifier l'existence d'un* $x_0\in E$ *tel que* $f^{n-1}(x_0)\neq 0$.

b) *En déduire que la famille* $\mathcal{B}=(f^{n-1}(x_0),\dots,f(x_0),x_0)$ *est une base de* E.

c) *Donner* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 4. *Dans tout le problème $n \geq 2$.*

1) *Etudier sur $\mathbb{R}$ suivant la parité de n les variations de* $f_n : x \to x^{n+1} + x^n$.
2) *Vérifier que* $f_n(-\frac{n}{n+1}) < 2$.
3) *En déduire, suivant la parite de n, le nombre de solutions de l'equation :* $f_n(x) = 2$.
4) *Soit A la matrice carré d'ordre 2 formée par des 1 partout, trouver P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ où* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5) *Soit E_n l'équation matricielle $X^{n+1} + X^n = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que la résolution de cette équation peur se ramener à celle de $(E'_n) : Y^{n+1} + Y^n = B$ d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*
6) *Montrer que* $BY = YB$.
7) *Si* $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *montrer que b=c=0.*
8) *Quelles sont les valeurs possibles de a .*
9) *Discuter suivant les valeurs de n le nombre de solutions de* (E_n)

Exercice 5. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et* $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1) *Calculer $J(1)^2$ en fonction de $J(1)$.*
2) *Exprimer $J(\lambda)$ en fonction de $J(1)$ et I_n.*
   En déduire $J(\lambda)^2$ en fonction de $J(\lambda)$ et I_n.
3) *En déduire une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que $J(\lambda)$ soit inversible, exprimer dans ce cas $J(\lambda)^{-1}$ en fonction de $J(\lambda)$.*

Exercice 6. *On note*

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{A} = \{aU + bI_n,\ a, b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geq 2)$$

1) *Calculer U^2, en déduire U^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
2) *Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner sa dimension.*
3) *Soit $M = aU + bI \in \mathcal{A}$.*
   Exprimer M^2 en fonction de M et I_n.
   En déduire que M est inversible si et seulement si $b(b + na) \neq 0$, et dans ce cas $M^{-1} \in \mathcal{A}$.
4) *Trouver les matrices $M \in \mathcal{A}$ vérifiant : $M^n = I_n$.*

Exercice 7. *Calculer les puissances successives de la matrice :*

$$A = \begin{bmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux nombres complexes.
Indication : On pourra ecrire A sous la forme $aJ + bI_3$.

Exercice 8. .

1) *Soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $A = X^tY$.*
   a) *Montrer que $rgA = 1$.*
   b) *Calculer AX, en déduire les valeurs propres de A.*
   c) *Conclure que A est diagonalisable.*
2) *Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $rgA = 1$.*
   Montrer que $\exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A = X^tY$.
   En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 9. *On considère m un nombre complexe non nul, et on pose :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \dfrac{1}{m} & 0 & m \\ \dfrac{1}{m^2} & \dfrac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

1) *Calculer $(A+I_3)(A-2I_3)$.*
En déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1}.

2) *Soit $B = \dfrac{1}{3}(A+I_3)$, $C = -\dfrac{1}{3}(A-2I_3)$.*
Calculer B^2, C^2, puis en déduire B^n, C^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) *Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et I_3.*

4) *Retrouver le résultat du c) en calculant le reste de la division euclidienne de X^n par : $(X+1)(X-2)$.*

Exercice 10. *Soit l'application linéaire* $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$

1) *Calculer $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ où $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.*

2) *Dire comment inverser la matrice :*

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Exercice 11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{ij} = (-1)^{n-j}\begin{pmatrix} n-j \\ i-1 \end{pmatrix}$, avec la convention $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$ si $p < q$.*

1) *Déterminer l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ ayant A pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.*
Indication : commencer d'abord par calculer $u(1), u(X), \dots, u(X^{n-1})$, à partir de la matrice, puis en déduire $u(P)$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

2) *En déduire A^3.*

Exercice 12. ***Concours marocain, 2005 et 2006.***
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on définit l'endomorphisme de E, noté $u_{i,j}$ par la relation suivante : $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$
Avec $\delta_{j,k}$ $= 1$ si $j = k$, appellé symbole de Kroeneker.
$= 0$ *si* $j \neq k$
On note aussi, $E_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, ègal à 1.

1) *Montrer que $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.*

2) *Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j})$, en déduire que $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

3) *Soit $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ fixéx, calculer pour tou $p \in \{1, \dots, n\}$, $u_{i,j} \circ u_{k,l}(e_p)$, puis en déduire $E_{i,j}E_{k,l}$.*

4) *Exprimer la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, dans la base $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, puis en déduire les produits $AE_{k,l}$ et $E_{k,l}A$.*

5) *Application : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.*

a) *Montrer que :*
$AM = MA, \ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow A = \lambda I_n$, *où* $\lambda \in \mathbb{K}$.

b) *Calculer* $\mathrm{Tr}(AE_{k,l})$.
En déduire que : $\mathrm{Tr}(AM) = 0, \ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow A = 0$.

Exercice 13. ***Formes linéaires et trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.***

1) *Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :*
$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(X) = \text{ tr } (AX)$

2) *On suppose que $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(XY) = \phi(YX)$.*
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :
$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(X) = \lambda \text{ tr } (X)$

Exercice 14. ***Commutant d'une matrice diagonale.***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AM = MA\}$, appelé commutant de A.

1) *Montrer que $\mathcal{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

2) *Soit $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les λ_i sont distincts.*

   a) *Chercher $\mathcal{C}_A$.*

   b) *Soit* $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$

   Montrer que Im (ϕ) est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

Exercice 15. ***Matrices d'une permutation.***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Avec

$\delta_{i,j} \begin{array}{l} = 1 \text{ si } i = j \text{ , appellé symbole de Kroeneker} \\ = 0 \text{ si } i \neq j \end{array}$

1) *Calculer P_σ, pour $n = 4$, $\sigma = (1\ 2), \sigma = (1\ 2\ 3)$ et $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$.*

2) *Montrer que $P_\sigma . P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.*

3) *Calculer $P_{\ id}$, en déduire que P_σ est inversible et préciser son inverse.*

Exercice 16. ***Matrices en damier.***

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est en damier si $a_{ij} = 0$ pour $j - i$ impair. On note par $\mathcal{D}$ l'ensemble de telle matrices.
Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Quelle est sa dimension ?

Exercice 17. ***Matrices stochastiques.***

Soit $\mathcal{D} = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } : a_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \forall\ i, j \right\}$.

1) *Donner un exemple pour $n = 2$ et un pour $n = 3$.*

2) *Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par multiplication.*

3) *Démontrer les matrices $A \in \mathcal{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$ sont celles dont chaque colonne contient $n - 1$ fois 0 et une fois 1.*

4) *Montrer qu'il s'agit là d'une matrice de permutation.*

Exercice 18. ***Matrices centrosymétriques.***

Ce sont les matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :
$a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$.

1) *Donner un exemple pour $n = 2$ et un pour $n = 3$.*

2) *Montrer que si A et B sont centro–symétriques, il en est de même de AB.*

Exercice 19. ***Quaternions***

1) *Montrer que* $\mathcal{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \right\}$ *est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.*

2) *Montrer que* $\mathcal{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \right\}$ *est un corps non commutatif. On l'appelle le corps des Quaternions.*

Exercice 20. ***Homographies.***
Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, *on note*

$$f_M : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\cup\{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\cup\{\infty\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$

Montrer que $M \to f_M$ *est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?*

Exercice 21. ***Problème géométrique.***
Soit $A_1, \dots, A_n$ n *points du plan. On cherche* n *point* $B_1, \dots, B_n$ *du plan tels que pour tout entier* $k \in [|1, n|]$, *le point* A_k *soit le milieu du segment* $[B_k, B_{k+1}]$ *(avec par convention* $B_{n+1} = B_1$*). Dans la suite de l'exercice, on note* z_M *l'affixe d'un point* M *du plan.*

1) *Écrire le sytème vérifié par* $z_{B_1}, \dots, z_{B_n}$.

2) *Résoudre ce sytème pour* $n = 3$ *et* $n = 4$. *Donner une interpétation géométrique du résultat.*

3) *Résoudre le système dans le cas général.*

4) *Quel est l'inverse de la matrice du système quand elle est inversible ? Sinon, quel est son rang ?*

Exercice 22. ***Échange de lignes.***
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible et* B *la matrice obtenue en échangeant dans* A *les colonnes* i *et* j. *Montrer que* B *est aussi inversible. Et qu'on passe de* A^{-1} *à* B^{-1} *en échangeant les lignes* i *et* j.

Exercice 23. M ***antisymétrique*** $\Longrightarrow I + M$ ***est inversible.***
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *antisymétrique.*

1) *Montrer que* $I + M$ *est inversible.*
Indication : si $MX = -X$, *calculer* ${}^t(MX)(MX)$*).*

2) *Soit* $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. *Montrer que* ${}^tA = A^{-1}$.

Fin.