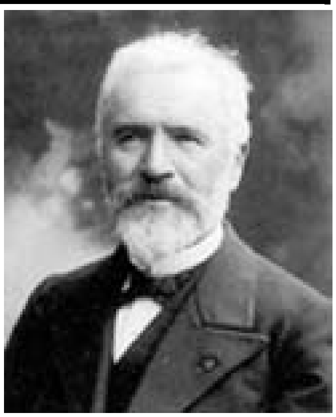
Feuille d'exercices: *Matrices et Sous espaces vectoriels*

Citations du jour :
- **Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes.**
- **Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier.**
- **Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets.**

Mathématicien du jour : Jordan

Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) est un mathématicien français, de père polytechnicien. Il fut ingénieur au corps des mines puis plus tard, enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France.
Elu membre étranger de la Royal Society et décoré Officier de la Légion d'Honneur.
Connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse.
On lui doit la méthode du pivot ou d'élimination de Gauss-Jordan). Cette méthode doit son nom aux mathématiciens Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan, sous le titre « Fang cheng » (la disposition rectangulaire).



Exercice 1 **On considère m un nombre complexe non nul, et on pose :**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

1) **Calculer $(A + I_3)(A - 2I_3)$.**
   En déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1}.
2) **Soit $B = \frac{1}{3}(A + I_3), C = -\frac{1}{3}(A - 2I_3)$.**
   Calculer B^2, C^2, puis en déduire B^n, C^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) **Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et I_3.**
4) **Retrouver le résultat du c) en calculant le reste de la division euclidienne de X^n par : $(X + 1)(X - 2)$.**

Exercice 2 **Dans tout l'exercice $n \geq 2$.**

1) **Etudier sur $\mathbb{R}$ suivant la parité de n les variations de $f_n : x \to x^{n+1} + x^n$.**
2) **Vérifier que $f_n(-\frac{n}{n+1}) < 2$.**
3) **En déduire, suivant la parite de n, le nombre de solutions de l'equation : $f_n(x) = 2$.**
4) **Soit A la matrice carré d'ordre 2 formée par des 1 partout, trouver P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.**
5) **Soit E_n l'équation matricielle $X^{n+1} + X^n = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que la résolution de cette équation peur se ramener à celle de $(E'_n) : Y^{n+1} + Y^n = B$ d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\zeta$.**
6) **Montrer que $BY = YB$.**
7) **Si $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrer que *b=c=0*.**
8) **Quelles sont les valeurs possibles de a .**
9) **Discuter suivant les valeurs de n le nombre de solutions de (E_n)**

Exercice 3 **On note**

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{A} = \{aU + bI_n,\ a, b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geq 2)$$

1) **Calculer U^2, en déduire U^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.**
2) **Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner sa dimension.**
3) **Soit $M = aU + bI \in \mathcal{A}$.**
   Exprimer M^2 en fonction de M et I_n.
   En déduire que M est inversible si et seulement si $b(b + na) \neq 0$, et dans ce cas $M^{-1} \in \mathcal{A}$.
4) **Trouver les matrices $M \in \mathcal{A}$ vérifiant : $M^n = I_n$.**

Exercice 4 **Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et** $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1) **Calculer $J(1)^2$ en fonction de $J(1)$.**
2) **Exprimer $J(\lambda)$ en fonction de $J(1)$ et I_n.**
   En déduire $J(\lambda)^2$ en fonction de $J(\lambda)$ et I_n.
3) **En déduire une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que $J(\lambda)$ soit inversible, exprimer dans ce cas $J(\lambda)^{-1}$ en fonction de $J(\lambda)$.**

Exercice 5 ***Matrices centrosymétriques.***
Ce sont les matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :
$a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$

1) **Donner un exemple pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.**
2) **Montrer que si A et B sont centro–symétriques, il en est de même de AB.**

Exercice 6 ***Matrices d'une permutation.***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$**, pour tout** $\sigma \in \mathcal{S}_n$**, on pose** $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$**. Avec** $\delta_{i,j} \begin{array}{l} = 1 \text{ si } i = j \\ = 0 \text{ si } i \neq j \end{array}$ **,**

appellé symbole de Kroeneker

1) **Calculer** P_σ**, pour** $n = 4$**,** $\sigma = (1\ 2), \sigma = (1\ 2\ 3)$ **et** $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$**.**
2) **Montrer que** $P_\sigma . P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$**.**
3) **Calculer** P_{id}**, en déduire que** P_σ **est inversible et préciser son inverse.**

Exercice 7 ***Matrices en damier.***

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**. On dit que** M **est *en damier* si** $a_{ij} = 0$ **pour** $j - i$ **impair. On note par** $\mathcal{D}$ **l'ensemble de telle matrices.**
Montrer que $\mathcal{D}$ **est une sous-algèbre de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**.**
Quelle est sa dimension ?

Exercice 8 ***Matrices stochastiques.***

Soit $\mathcal{D} = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } : a_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \forall\ i, j \right\}$**.**

1) **Donner un exemple pour** $n = 2$ **et un pour** $n = 3$**.**
2) **Montrer que** $\mathcal{D}$ **est stable par multiplication.**
3) **Démontrer les matrices** $A \in \mathcal{D}$ **inversibles telles que** $A^{-1} \in \mathcal{D}$ **sont celles dont chaque colonne contient** $n - 1$ **fois** 0 **et une fois** 1**.**
4) **Montrer qu'il s'agit là d'une matrice de permutation.**

Exercice 9 **Calculer les puissances successives de la matrice :**

$$A = \begin{bmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{bmatrix}$$

où a et b sont deux nombres complexes.
Indication : On pourra ecrire A **sous la forme** $aJ + bI_3$**.**

****

Fin