My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'exercices : *Polynômes.*

Feuille d'Exercices
2016-2017

Exercice 1. *Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. On pose $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.*

Exercice 2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne de :*

1) X^n *par* $(X-1)(X-2)$ *et par* $(X-1)^2$.

2) $(X\cos(\theta) + \sin(\theta))^n$ *par* X^2+1, *où* $(\theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 3. *Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 ?*

Exercice 4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ donnés.*

1) *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :* $(z+1)^n = e^{2ina}$.

2) *En déduire* $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1) *Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

2) *En déduire* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 6. *Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ ainsi que leurs multiplicités dans le polynôme :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$

Exercice 7. *Soit $n \in N^*$. Calculer le quotient de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X-1)^2$.*

Exercice 8. *Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :* $X^6+1, \quad X^8+X^4+1$.

Exercice 9. *Déterminer tous les polynômes solutions des équations différentielles suivantes :*

1) $(1-X)P'(X) - P(X) = X^n$

2) $XP``(X) - (X+m)P'(X) + nP(X) = 0$

3) $(1+X)^2 P``(X) - (2X+1)P'(-X) + 2P(X) = 0$

4) $4P(X) = (X-1)P'(X) + P``(X)$.
Commencer d'abord par déterminer leurs degrés.

Exercice 10. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la multiplicité de la racine 1 dans le polynôme suivants :*

1) $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

2) $X^{2n} - n^2 X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2 X^{n-1} + 1$.

Exercice 11. *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X], p = \deg A$ et $q = \deg B$.*
On considère l'application : $\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ & (U,V) & \longmapsto & UA+VB \end{array}$
Démontrer que : $A \wedge B = 1 \Longleftrightarrow \Phi$ est bijective.

Exercice 12. ***Linéarité du reste et du quotient.***
Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n > 0$. On considère les applications :
$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ & P & \longmapsto & R \end{array}$ *et* $\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P & \longmapsto & Q \end{array}$
avec : $P = QB + R$.

1) *Montrer que Φ et Ψ sont linéaires.*
2) *Chercher leurs noyaux et leurs images.*
3) *Simplifier $\Phi(P_1P_2)$, pour tout $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]$.*

Exercice 13. ***Polynômes d'interpolation de Lagrange.***
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réels de $[0,1]$ deux à deux distincts, on pose $L_k(X) = \displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{X - r_i}{r_k - r_i}$.

1) *Calculer $L_k(r_j)$ pour $1 \leq j, k \leq n$.*
2) *Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(r_k)L_k(X)$*
   On pourra s'intéresser aux racines de $Q(X) = P(X) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(r_k)L_k(X)$.
3) *En déduire que la famille $(L_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.*
4) *Exprimer tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base.*
5) *En déduire que $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui interpole f aux point $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ càd $f(r_k) = P(r_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$*

Exercice 14. ***Polynômes de Legendre.***
On pose : $P_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1) *Précisez les racines de $(X^2-1)^n$ ainsi que leurs multiplicités.*
2) *Montrer par récurrence sur $0 \leq k \leq n$ que $((X^2-1)^n)^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$.*
3) *En déduire que $((X^2-1)^n)^{(n)}$ admet exactement n racines distinctes dans $]-1,1[$.*

Exercice 15. ***Polynômes de Tchebechev.***
On pose : $T_n(X) = \cos(n \arccos(x))$ pour tout $x \in [-1,1]$.

1) *Trouver une relation de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1}.*
2) *Montrer que T_n est un polynôme de degré n , préciser son coefficient dominant.*
3) *Montrer que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pout tout réel t.*
4) *En déduire les racines de T_n.*

Exercice 16. ***Polynômes de degrés échellonés.***
Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynôme de degrés échellonés, c-à-d : deg$(P_k) = k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, montrer qu'elle est libre.

Exercice 17. ***Racines réelles simples.***
Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles simples.

1) *Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)P''(x) \leq P'^2(x)$.*
2) *Démontrer que : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.*

Exercice 18. *Valeur moyenne.*
Soient $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *tels que :* $\forall\ P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, *on a :*
$P(z_0) = \dfrac{P(z_1) + \cdots + P(z_n)}{n}$. *On note* $\Phi(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$.

1) *Calculer* $\dfrac{\Phi(z_0)}{z_0 - z_k}$.
2) *En déduire que* $\Phi(X) = \dfrac{(X - z_0)\Phi'(X)}{n} + \Phi(z_0)$.
3) *Démontrer que* $z_1, \ldots, z_n$ *sont les sommets d'un polygone régulier de centre* z_0.
4) *Étudier la réciproque ?*

Exercice 19. *Relations entre racines et coéfficients d'un polynôme.*

1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^5 + 6z^3 - 2z^2 + 5z - 10 = 0$, *sachant que 1 est une racine et qu'il y a deux racines dont le produit est égal à 5.*
2) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $6x^6 - 5x^5 - 44x^4 + 44x^2 + 5x - 6 = 0$, *sachant que 1 et -1 sont racines puis poser* $y = x + \dfrac{1}{x}$.
3) *Soit* p, q *et* r *trois nombres complexes et* a, b, c *les trois racines du polynôme* $X^3 + pX^2 + qX + r$. *Calculer en fonction de* p, q *et* r *l'expression* $a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b$.
4) *On considre le polynôme :* $X^4 + pX^2 + qX + r$ *avec* $r \neq 0$. *On note* $x_1, \ldots, x_4$ *ses racines.*
   Calculer les expressions suivantes en fonction de p, q *et* r *:* $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4}$, $\quad \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} + \dfrac{1}{x_4^2}$.
5) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *le système suivant :*
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = -1 \end{cases}$$

Exercice 20. *Critère d'Eisenstein d'irréductibilité dans* $\mathbb{Q}[X]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *tel qu'il existe* p *nombre premier vérifiant :*p *divise* a_k *pour* $0 \leq k \leq n-1$ *et* p *ne divise pas* a_n *et* p^2 *ne divise pas* a_0 .

1) *Montrer que le polynôme* P *est irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$.
2) *Application : Montrer que les polynômes suivant sont irréductibles sur* $\mathbb{Q}$ *:*
   a) $X^p + p$ *où* p *est premier.*
   b) $-3X^{14} + 2X^8 + 8X^3 - 26X^2 + 6$.

Exercice 21. *Nombre algébrique rationnel.*
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. *On dit que* α *est algébrique s'il existe un polynôme* $P \in \mathbb{Q}[X]$ *tel que* $P(\alpha) = 0$.
On dit que P *est un polynôme annulateur de* a. *Le polynôme annulateur de* a, *unitaire de plus bas degré est appelé polynôme minimal de* α *et se note* π_a.

1) *Justifier l'unicité d'un tel polynôme quand* a *est algébrique.*
2) *Montrer que* i *et* $\sqrt{2}$ *sont algébriques, préciser leurs polynômes minimaux.*
3) *Soit* α *algébrique de polynôme minimal* P. *Démontrer que* P *est irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$ *et que* α *est racine simple de* P.
4) *Soit* α *algébrique, et* $P \in \mathbb{Q}[X]$ *tel que* $P(\alpha) = 0$. *On suppose que la multiplicité de* α *dans* P *est strictement supérieure à* $\dfrac{1}{2}\deg P$. *Démontrer que* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Exercice 22. *Opérateur des différences finies.*

On pose $\begin{cases} U_0(X) = 1 \\ U_1(X) = X \\ U_p(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}, \quad \forall\, p \geq 2 \end{cases}$, *et*

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1) *Montrer que* Δ *est linéaire.*

2) *Déterminer* $\ker \Delta$.

3) *Montrer que* $\deg \Delta P = \deg P - 1$, *pour tout polynôme* P *non constant.*

4) *En déduire que* $\Delta^{n+1} P = 0 \quad \forall\, P \in \mathbb{K}_n[X]$.
On rappelle que : $\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \ldots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$ *et que* $\Delta^0(P) = P$.

5) *Démontrer que la famille* $(U_p)_{0 \leq p \leq n}$ *est libre dans* $\mathbb{K}_n[X]$.

6) *Calculer* $\Delta(U_p)$, *puis* $\Delta^n(U_p)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

7) *Soit* $P \in \mathbb{K}_n[X]$ *tel que* $\Delta^k(P)(0) = 0, \quad \forall\, 0 \leq k \leq n$, *montrer que* $P = 0$.

8) *En déduire que :* $\forall\ P \in \mathbb{K}_n[X]$, *on a :*

$$P = P(0) + (\Delta P)(0) U_1 + (\Delta^2 P)(0) U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0) U_n$$

9) *Conclure que* $(U_p)_{0 \leq p \leq n}$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$.

10) *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$. *Démontrer que :*
$P(n) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$ *si et seulement si les coordonnées de* P *dans la base* (U_p) *sont entières.*

11) *Soit* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *une fonction quelconque. Démontrer que* f *est polynomiale si et seulement si :* $\exists\ n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\Delta^n(f) = 0$.

Exercice 23. *Endomorphismes de* $\mathbb{K}[X]$ *qui commutent avec la dérivation.*

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ *commutant avec la dérivation, c'est à dire :* $\forall\ P \in \mathbb{K}[X]$, *on a* $\Phi(P') = \Phi(P)'$.

1) *Démontrer qu'il existe un unique suite* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de scalaires tels que :*

$$\forall\ P \in \mathbb{K}_n[X], \text{ on a : } \Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}.$$

2) *Décomposer ainsi l'endomorphisme* $\Phi : P \longrightarrow P(X+1)$.

Exercice 24. *Lemme de Gauss.*

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. *On appelle contenu de* P *le pgcd des coefficients de* P, *on le nota par : cont(*P*).*

1) *Soient* $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ *avec cont(*P*)* $= 1$, *et* $R = PQ$. *Soit* p *un facteur premier de cont(R).*

a) *Si p est premier avec le coefficient constant de* P, *Démontrer que p divise tous les coefficients de* Q.

b) *Si p divise le coefficient constant de* P, *se ramener au cas précédent.*

c) *En déduire que cont(Q) = cont(R).*

2) *Lorsque cont(*P*)* $\neq 1$, *trouver cont(PQ).*

3) *Application : Soit* $R \in \mathbb{Z}[X]$, *et* $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ *tels que* $R = PQ$. *Montrer qu'il existe* $P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ *proportionnels à* P *et* Q *et tels que* $R = P_1 Q_1$.
cad : un polynôme à coefficients entiers réductible sur $\mathbb{Q}$ *est aussi réductible sur* $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Fin.}}$