Vendredi 14 Mai 2017

Déterminants

Calculs de déterminants

Dans tout le problème a, b, c désignent des réels et n un entier supérieur à 1.

Partie I

Soit Δ_n le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :
les éléments de la diagonale principale sont égaux à a, ceux au dessus de la cette diagonale valent b et enfin ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi : $\Delta_1 = |a|$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}$.

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

2.a Calculer Δ_n dans les cas $a = c$ et $a = b$.

2.b Calculer Δ_n dans le cas où $b = c$.

3. On suppose $b \neq c$ et $n \geq 3$.

3.a Etablir que $\Delta_n - (2a - b - c)\Delta_{n-1} + (a-b)(a-c)\Delta_{n-2} = 0$.
On pourra par exemple opérer avec les deux dernières colonnes puis faire la même manipulation sur les lignes.

3.b Donner l'expression du terme général de la suite $(\Delta_n)_{n\geq 1}$.

Partie II

Dans cette partie $a_1, \ldots, a_n$ désignent n réels. On désire calculer le déterminant D_n de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :

Les coefficients diagonaux sont les $a_1, \ldots, a_n$, les coefficients au dessus de la diagonale sont égaux à b tandis que ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi $D_1 = |a_1|$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}$.

1. Dans un premier temps, nous supposons $b \neq c$.
On pose $D_n(x)$, le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de la matrice définissant D_n.

Ainsi $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ c + x & \cdots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}$.

1.a Montrer que $x \mapsto D_n(x)$ est une fonction affine, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x) = \alpha x + \beta$.

1.b Calculer α et β en évaluant $D_n(x)$ pour des valeurs judicieuses de x.

1.c En déduire l'expression de D_n.

2. On désire calculer D_n dans le cas où $b = c$.

2.a On fixe le paramètre c et on fait varier le paramètre b dans $\mathbb{R}$. Etablir que D_n apparaît alors comme une fonction continue de la variable b variant dans $\mathbb{R}$.

2.b En déduire la valeur de D_n dans le cas où $b = c$

Correction

Partie I

1. $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = a^2 - bc$, $\Delta_3 = a^3 + b^2c + bc^2 - 3abc$.

2.a Dans le cas $a = c$: $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (a-b) & & a-b \end{vmatrix}$ via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$.

donc en développant selon la première colonne $\Delta_n = a\begin{vmatrix} a-b & & (0) \\ & \ddots & \\ (a-b) & & a-b \end{vmatrix}_{[n-1]} = a(a-b)^{n-1}$.

En transposant, on obtient $\Delta_n = a(a-c)^{n-1}$ dans le cas $a = b$.

2.b $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ donne $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a+(n-1)b & b & & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & b & & a \end{vmatrix}$.

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$ donne

$$\Delta_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} .$$

3.a Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$ et $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ donne $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & b & b & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ c & & a & b & 0 \\ c & \cdots & c & a & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & c-a & 2a-b-c \end{vmatrix}$.

En développant selon la dernière colonne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & b & b & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ c & & a & b & 0 \\ c & \cdots & c & a & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & c-a & 2a-b-c \end{vmatrix} = -(b-a)\begin{vmatrix} a & & b & b \\ & \ddots & & \vdots \\ c & & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c-a \end{vmatrix} + (2a-b-c)\begin{vmatrix} a & & b & b \\ & \ddots & & \vdots \\ c & & a & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

puis $\Delta_n = -(b-a)(c-a)\Delta_{n-2} + (2a-b-c)\Delta_{n-1}$ et la relation demandée.

3.b La suite $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (2a-b-c)r + (a-b)(a-c) = 0$. En reconnaissant somme et produit des racines, les solutions de cette équation caractéristique sont $a-b$ et $a-c$, elles sont distinctes car $b \neq c$ et donc le terme général de (Δ_n) est de la forme $\Delta_n = \lambda(a-b)^n + \mu(a-c)^n$.

Pour $n = 1$, on obtient $\lambda(a-b) + \mu(a-c) = a$ (1)

Pour $n = 2$, on obtient $\lambda(a-b)^2 + \mu(a-c)^2 = a^2 - bc$ (2)

$(a-c)\times(1) - (2)$ donne $\lambda(a-b)(b-c) = c(b-a)$ donc $\lambda = \dfrac{c}{c-b}$ et de même $\mu = \dfrac{b}{b-c}$ d'où

$$\Delta_n = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b} .$$

Partie II

1.a En retranchant la première colonne à toutes les autres colonnes, on fait disparaître les x des colonnes $C_2, \dots, C_n$. En développant alors le déterminant selon sa première colonne on obtient une somme de coefficients qui sont des fonctions affines de x multipliés par des cofacteurs qui eux ne dépendent par de x. Ainsi $D_n(x)$ apparaît comme une fonction affine de x.

1.b Pour $x=-b$, $D_n(-b)=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)=\beta-\alpha b$.

Pour $x=-c$, $D_n(-c)=\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)=\beta-\alpha c$.

On en déduit $\alpha=\dfrac{D_n(-b)-D_n(-c)}{c-b}=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$ et

$\beta=D_n(-b)+\alpha b=\dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$.

1.c $D_n=D_n(0)=\beta=\dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$.

2.a Notons $m_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice définissant D_n. En fixant c et en faisant b, on peut percevoir $m_{i,j}$ comme une fonction de b : $b\mapsto m_{i,j}(b)$. Cette fonction est continue car soit $m_{i,j}(b)=b$, soit $m_{i,j}(b)$ ne dépend pas de b. Puisque $D_n(b)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}m_{\sigma(i),i}(b)$, $b\mapsto D_n(b)$ est continue par opération sur les fonctions continue.

2.b Par continuité : $D_n(c)=\lim_{b\to c}D_n(b)$.

Or pour $b\neq c$: $D_n(b)=\dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$ donc $D_n(c)=\lim_{b\to c}\dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$.

$$\frac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}=\frac{(c-b+b)\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-b\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{b-c}$$

Mais $\lim_{c\to b}\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)=\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)$ et $\lim_{b\to c}\dfrac{\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)-\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{b-c}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\prod_{i=1}^{n}(a_j-b)\right)_{b=c}=-\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_i-c)$.

Finalement, quand $b=c$: $D_n=\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)+c\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_j-c)$.