Lundi 29 Mai 2017

Espaces Préhilbertiens

Matrices de Gram

Partie I :

Matrices de Gram

Dans tout le problème E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs de E.

1. On se donne u, v dans E et on note $\Delta(u,v) = \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) \\ (v \mid u) & (v \mid v) \end{vmatrix}$.

   Montrer que $\Delta(u,v) \geqslant 0$, et que $\Delta(u,v) = 0$ si et et seulement si u, v sont liés.

2. On se donne u, v, w dans E et on note $\Delta(u,v,w) = \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) & (u \mid w) \\ (v \mid u) & (v \mid v) & (v \mid w) \\ (w \mid u) & (w \mid v) & (w \mid w) \end{vmatrix}$.

   (a) Montrer que w s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur a combinaison linéaire de u, v et d'un vecteur b orthogonal à u et à v.

   (b) Montrer que $\Delta(u,v,a) = 0$.

   (c) Prouver que $\Delta(u,v,w) = \Delta(u,v)\,\|b\|^2$.

   (d) Montrer que $\Delta(u,v,w) \geqslant 0$, avec $\Delta(u,v,w) = 0$ si et seulement si u, v, w sont liés.

3. On va généraliser les notations et les résultats précédents.
   On note m un entier strictement positif quelconque.
   Pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de E, on note $G(u_1, \ldots, u_m)$ la matrice carrée d'ordre m et de terme général $(u_i \mid u_j)$ (à l'intersection de la ligne i et de la colonne j).
   On note $\Delta(u_1, \ldots, u_m) = \det(G(u_1, \ldots, u_m))$.

   (a) On note F le sous-espace de E engendré par $u_1, \ldots, u_{m-1}$.
   Soit $u_m = a + b$ (avec $a \in F$) la décomposition de u_m sur $E = F \oplus F^\perp$.
   Montrer que $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, a) = 0$.

   (b) Prouver que $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m) = \Delta(u_1, \ldots, u_{m-1})\,\|b\|^2$.

   (c) En déduire $\Delta(u_1, \ldots, u_m) \geqslant 0$ (avec $\Delta(u_1, \ldots, u_m) = 0 \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_m$ sont liés).

4. Soit F un sous-espace de E, de base $u_1, \ldots, u_m$.
   Soit $d(x,F)$ la distance d'un vecteur x à F. Montrer que $d(x,F)^2 = \dfrac{\Delta(u_1, \ldots, u_m, x)}{\Delta(u_1, \ldots, u_m)}$.

5. Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E.
   Soit $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ une famille de n vecteurs de E.
   Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

   (a) Il existe une isométrie vectorielle f de E tel que : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ f(e_k) = \varepsilon_k$.

   (b) Les matrices $G(e_1, \ldots, e_n)$ et $G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sont égales.

Familles obtusangles Partie II

Dans tout le problème E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs de E.

1. On note m un entier strictement positif quelconque.
   Pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de E, on note $G(u_1, \ldots, u_m)$ la matrice carrée d'ordre m et de terme général $(u_i \mid u_j)$ (à l'intersection de la ligne i et de la colonne j).
   On note $\Delta(u_1, \ldots, u_m) = \det(G(u_1, \ldots, u_m))$.
   (a) Dans ce cas particulier où $m = 2$, montrer que $\Delta(u_1, u_2) \geqslant 0$ (avec $\Delta(u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_1$ sont colinéaires).
   (b) Dans le cas général, soit A la matrice des vecteurs $u_1, \ldots, u_m$ dans une base orthonormée (e) de E. Montrer que $G(u_1, \ldots, u_m) = {}^{\mathrm{t}}A\, A$.
   (c) Si si $m = n$, en déduire : $\Delta(u_1, \ldots, u_n) \geqslant 0$ (avec $\Delta(u_1, \ldots, u_n) = 0 \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_n$ sont liés).
2. Soit $u_0, u_1, \ldots, u_m$ une famille de $m+1$ vecteurs *deux à deux distincts* de $\mathcal{S} = \{u \in E,\ \|u\| = 1\}$.
   Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   — Les distances $\|u_j - u_i\|$ (avec $j \neq i$ dans $\{0, \ldots, m\}$) sont toutes égales (autrement dit, les vecteurs u_k sont équidistants sur $\mathcal{S}$).
   — Les produits scalaires $(u_i \mid u_j)$ (avec $j \neq i$ dans $\{0, \ldots, m\}$) sont tous égaux.

Dans la suite de cette partie, on suppose que les conditions précédentes sont réalisées.

3. On note λ la valeur commune des produits scalaires $(u_i \mid u_j)$.
   Montrer que $-1 \leqslant \lambda < 1$ et que $\Delta(u_0, \ldots, u_m) = (1 + m\lambda)(1 - \lambda)^m$.
4. En déduire que si $u_0, \ldots, u_m$ sont libres alors $m < n$ et $-1/m < \lambda < 1$.
5. Dans cette question, on suppose que $u_0, \ldots, u_m$ sont liés.
   On dira dans ce cas que la famille $u_0, \ldots, u_m$ possède la propriété $\mathcal{P}_m$.
   (a) Montrer que $\lambda = -1/m$.
   (b) Montrer la famille $u_0, \ldots, u_m$ est de rang m (il en résulte donc $m \leqslant n$).
   (c) Prouver $\sum_{k=0}^{m} u_k = \overrightarrow{0}$ (indication : partir d'une relation de liaison entre les u_k).
6. Dans cette question, on voit comment créer une famille $u_0, \ldots, u_n$ ayant la propriété $\mathcal{P}_n$.
   (a) Indiquer comment choisir u_0, u_1, pour que la famille u_0, u_1 ait la propriété $\mathcal{P}_1$.
   (b) Indiquer comment choisir u_0, u_1, u_2 pour que la famille u_0, u_1, u_2 ait la propriété $\mathcal{P}_2$.
   (c) Soit m dans $\{2, \ldots, n\}$.
   On suppose qu'on a construit une famille $u_0, \ldots, u_{m-1}$ ayant la propriété $\mathcal{P}_{m-1}$.
   Soit F le sous-espace de E engendré par $u_0, \ldots, u_{m-1}$ (on sait que $\dim F = m - 1$).
   Soit v_m un vecteur unitaire orthogonal à F.
   Pour tout k de $\{0, \ldots, m-1\}$, on pose $v_k = -\dfrac{1}{m} v_m + \sqrt{1 - \dfrac{1}{m^2}}\, u_k$.
   Montrer que la famille $v_0, v_1, \ldots, v_m$ possède la propriété $\mathcal{P}_m$.
   (d) Conclure

Corrigé Partie I

1. On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous vecteurs u, v de E, on $|(u \mid v)| \leqslant \|u\| \|v\|$, c'est-à-dire $(u \mid v)^2 \leqslant (u \mid v)(v \mid v)$, avec égalité si et seulement si u, v sont liés.

   Ainsi $\Delta(u, v) = (u \mid v)(v \mid v) - (u \mid v)^2 \geqslant 0$, et $\Delta(u, v) = 0 \Leftrightarrow u, v$ sont liés.

2. (a) Soit F le sous-espace de E engendré par u et v. On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$.
   L'écriture $w = a + b$ est la décomposition de w sur cette somme directe.

   (b) Par hypothèse, il existe λ, μ dans $\mathbb{R}$ tels que $a = \lambda u + \mu v$.
   Dans $\Delta(u, v, a)$ on remplace w par cette expression dans les produits scalaires $(\cdot \mid a)$.

$$\Delta(u, v, a) = \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) & (u \mid a) \\ (v \mid u) & (v \mid v) & (v \mid a) \\ (a \mid u) & (a \mid v) & (a \mid a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) & \lambda (u \mid u) + \mu (u \mid v) \\ (v \mid u) & (v \mid v) & \lambda (v \mid u) + \mu (v \mid v) \\ (a \mid u) & (a \mid v) & \lambda (a \mid u) + \mu (a \mid v) \end{vmatrix} = 0$$

   (en effet les trois colonnes C_1, C_2, C_3 de ce déterminant vérifient $C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2$).

   (c) On a $(u \mid w) = (u \mid a + b) = (u \mid a)$. De même $(v \mid w) = (v \mid a)$.

   Enfin $(w \mid w) = (a \mid a) + (b \mid b)$ d'après Pythagore.

   On en déduit (en linéarisant par rapport à la troisième colonne) :

$$\begin{aligned} \Delta(u, v, w) &= \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) & (u \mid a) \\ (v \mid u) & (v \mid v) & (v \mid a) \\ (a \mid u) & (a \mid v) & (a \mid a) + (b \mid b) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) & (u \mid a) \\ (v \mid u) & (v \mid v) & (v \mid a) \\ (a \mid u) & (a \mid v) & (a \mid a) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) & 0 \\ (v \mid u) & (v \mid v) & 0 \\ (a \mid u) & (a \mid v) & (b \mid b) \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\Delta(u, v, a)}_{=0} + \begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) \\ (v \mid u) & (v \mid v) \end{vmatrix} (b \mid b) = \Delta(u, v) \|b\|^2 \end{aligned}$$

   (d) Puisque $\Delta(u, v) \geqslant 0$, la question précédente donne $\Delta(u, v, w) \geqslant 0$.

   Plus précisément : $\Delta(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow (\Delta(u, v) = 0$ ou $b = \overrightarrow{0}) \Leftrightarrow (u, v$ liés ou $w = a)$.

   Ainsi $\Delta(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow u, v$ sont liés ou (sinon) w est dans le plan engendré par u et v : tout cela équivaut bien sûr à dire que les trois vecteurs u, v, w sont liés.

3. (a) Notons $C_1, \ldots, C_m$ les colonnes du déterminant $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, a)$.

   Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ tels que $a = \sum\limits_{j=1}^{m-1} \lambda_j u_j$.

$$\text{On en déduit } C_m = \begin{pmatrix} (u_1 \mid a) \\ (u_2 \mid a) \\ \vdots \\ (u_{m-1} \mid a) \\ (a \mid a) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \begin{pmatrix} (u_1 \mid u_j) \\ (u_2 \mid u_j) \\ \vdots \\ (u_{m-1} \mid u_j) \\ (a \mid u_j) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j C_j.$$

   Ainsi les colonnes $C_1, \ldots, C_{m-1}, C_m$ sont liées, donc $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, a) = 0$.

(b) Notons $C_1, \ldots, C_m$ les colonnes du déterminant $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m)$.

Comme dans la question précédente, notons $a = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j u_j$.

Ainsi $D' = \Delta(u_1, \ldots, u_{m_1}, a) = 0$ et $D' = \Delta(u_1, \ldots, u_{m_1}, u_m)$ sont égaux, à l'exception du coefficient d'indice (m, m), qui vaut $\|a\|^2$ dans D' et $\|u_m\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ dans D.

$$\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m) = \begin{vmatrix} (u_1 \mid u_1) & \ldots & (u_1 \mid u_{m-1}) & (u_1 \mid a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_{m-1} \mid u_1) & \ldots & (u_{m-1} \mid u_{m-1}) & (u_{m-1} \mid a) \\ (a \mid u_1) & \ldots & (a \mid u_{m-1}) & \|a\|^2 + \|b\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, a)}_{=0} + \begin{vmatrix} (u_1 \mid u_1) & \ldots & (u_1 \mid u_{m-1}) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ (u_{m-1} \mid u_1) & \ldots & (u_{m-1} \mid u_{m-1}) & 0 \\ (a \mid u_1) & \ldots & (a \mid u_{m-1}) & \|b\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (u_1 \mid u_1) & \ldots & (u_1 \mid u_{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_{m-1} \mid u_1) & \ldots & (u_{m-1} \mid u_{m-1}) \end{vmatrix} \|b\|^2 = \Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}) \|b\|^2$$

(c) On montre la propriété par récurrence sur le nombre m de vecteurs.

Puisque $\Delta(u_1) = \|u_1\|$, la propriété est évidente si $m = 1$.

On se donne $m \geqslant 2$ et on suppose que la propriété a été prouvée au rang $m - 1$.

Avec les notations précédentes, on a $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m) = \Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}) \|b\|^2$.

Il est donc clair que $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m) \geqslant 0$. Ensuite :

$$\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}) = 0 \\ \text{ou } \|b\| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1, \ldots, u_{m-1} \text{ liés} \\ \text{ou } u_m \in \operatorname{Vect}\{u_1, \ldots, u_{m-1}\} \end{cases}$$

Finalement $\Delta(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m) = 0 \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m$ sont liés, ce qui prouve la propriété au rang m et achève la récurrence.

4. Soit $x = a + b$ la décomposition de x sur $F \oplus F^\perp$. On a $d = d(x, F) = \|b\|$.
On sait depuis (3c) que $\Delta(u_1, \ldots, u_m, x) = \Delta(u_1, \ldots, u_m) \|b\|^2$.
Le résultat est alors immédiat en divisant par $\Delta(u_1, \ldots, u_m) > 0$.

5. – On suppose qu'il existe f dans $O(E)$ tel que, pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, $f(e_k) = \varepsilon_k$.
Alors : $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $(\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) = (e_i \mid e_j)$ (car f conserve le produit scalaire).
Autrement dit, on a l'égalité matricielle $G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = G(e_1, \ldots, e_n)$.

– Réciproquement, on suppose $G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = G(e_1, \ldots, e_n)$.
(e) étant une base, il exite un unique f de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $f(e_k) = \varepsilon_k$.
Il reste à prouver que f est une isométrie vectorielle.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ dans E. On a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$ et $f(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j$.
Avec ces notations, et compte tenu des égalités $(\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) = (e_i \mid e_j)$, on trouve :

$$(f(x) \mid f(y)) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \mid \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i \mid e_j) = (x \mid y)$$

Cela signifie que f conserve le produit scalaire. Donc f est un élément de $O(E)$.

Corrigé Partie II

1. (a) On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   pour tous u_1, u_2 de E, on $|(u_1 \mid u_2)| \leqslant \|u_1\| \, \|u_2\|$, c'est-à-dire $(u_1 \mid u_2)^2 \leqslant (u_1 \mid u_1)\,(u_2 \mid u_2)$, avec égalité si et seulement si u_1, u_2 sont liés.
   Ainsi $\Delta(u_1, u_2) = (u_1 \mid u_1)\,(u_2 \mid u_2) - (u_1 \mid u_2)^2 \geqslant 0$, et $\Delta(u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow u_1, u_2$ sont liés.

   (b) Soit $(e) = e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormale de E.
   Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1..n}$, ce qui signifie que pour tout j de $\{1, \ldots, m\}$, $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.
   On notera ici $[M]_{i,j}$ le terme d'indice i, j d'une matrice M.
   Posons $G = G(u_1, \ldots, u_m)$. Pour tous i, j de $\{1, \ldots, m\}$, on a :
   $[G]_{i,j} = (u_i \mid u_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} [A]_{k,i} [A]_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} [{}^{\mathrm{t}}A]_{i,k} [A]_{k,j} = [{}^{\mathrm{t}}AA]_{i,j}$.
   Ainsi, on a l'égalité matricielle $G(u_1, u_2, \ldots, u_m) = {}^{\mathrm{t}}AA$.

   (c) Si mn, on en déduit $\Delta(u_1, \ldots, u_n) = \det(G) = \det({}^{\mathrm{t}}AA) = \det(A)^2 \geqslant 0$.
   Il en découle également : $\Delta(u_1, \ldots, u_n) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_n$ sont liés.

2. Pour tous i, j de $\{0, \ldots, m\}$, on a : $\|u_j - u_i\|^2 = \|u_j\|^2 + \|u_i\|^2 - 2\,(u_i \mid u_j) = 2(1 - (u_i \mid u_j))$.
   Il est alors immédiat que les $\|u_j - u_i\|$ sont constants $\Leftrightarrow$ les $(u_i \mid u_j)$ sont constants.

3. On a $|(u_i \mid u_j)| \leqslant \|u_i\| \, \|u_j\|$ c'est-à-dire $|\lambda| \leqslant 1$ (Cauchy-Schwarz).
   Le cas $\lambda = -1$ est possible avec $u_j = -u_i$, mais $\lambda = 1$ est impossible car il en résulterait $u_j = u_i$ (or on a supposé que les vecteurs $u_0, \ldots, u_m$ étaient distincts deux à deux).
   On a bien sûr $\Delta = \Delta(u_0, u_1, \ldots, u_m) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ \lambda & \ldots & \lambda & 1 \end{vmatrix}$ (déterminant d'ordre $m+1$).
   On ajoute toutes les lignes à la première, puis on factorise $1 + m\lambda$ dans L_1.
   Ensuite on retranche $\lambda \mathrm{L}_1$ à toutes les autres lignes :
   $$\Delta = (1+m\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda & \ldots & \lambda \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \lambda \\ \lambda & \ldots & \ldots & \lambda & 1 \end{vmatrix} = (1+m\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
   Le déterminant final est triangulaire d'ordre $m+1$.
   Conclusion : $\Delta(u_0, u_1, \ldots, u_m) = (1+m\lambda)(1-\lambda)^m$.

4. Si $u_0, \ldots, u_m$ sont libres, on a bien sûr $m \leqslant n$ (car $\dim E = n$).
   Il en découle aussi $\Delta(u_0, u_1, \ldots, u_m) = (1+m\lambda)(1-\lambda)^m > 0$.
   Puisque $-1 \leqslant \lambda < 1$, on obtient effectivement $1 + m\lambda > 0$ donc $\lambda < -1/m$.

5. (a) On a ici $\Delta(u_0, u_1, \ldots, u_m) = (1+m\lambda)(1-\lambda)^m = 0$ donc $\lambda = -1/m$.

(b) On note que $\Delta(u_1,\ldots,u_m)=(1+(m-1)\lambda)(1-\lambda)^{m-1}$ (on a retiré le vecteur u_0).
Puisque $\lambda=-1/m$, ce déterminant est strictement positif. Il en résulte que $u_1,\ldots,u_m$ sont libres donc que la famille $u_0,u_1,\ldots,u_m$ est de rang m (remarque : on aurait tout aussi bien pu retirer un autre vecteur que u_0).

(c) On sait qu'il existe $\lambda_0,\ldots,\lambda_m$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{k=0}^{m}\lambda_k u_k=\overrightarrow{0}$.
Soit j dans $\{0,\ldots,m\}$. On multiplie scalairement cette égalité par u_j.
On trouve $0=\Big(u_j\mid\sum\limits_{k=0}^{m}\lambda_k u_k\Big)=\lambda_j+\sum\limits_{k\neq j}\lambda_k\,(u_j\mid u_k)=\lambda_j-\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k\neq j}\lambda_k$
Ainsi $\sum\limits_{k\neq j}\lambda_k=m\lambda_j$ donc $\sum\limits_{k=0}^{m}\lambda_k=(m+1)\lambda_j$.
Il en découle que les λ_j sont tous égaux (à une valeur non nulle bien sûr).
En divisant $\sum\limits_{k=0}^{m}\lambda_k u_k=\overrightarrow{0}$ par cette valeur commune, on trouve $\sum\limits_{k=0}^{m}u_k=\overrightarrow{0}$.
Autre méthode : posons $v=\sum\limits_{k=0}^{m}u_k$. L'égalité $v=\overrightarrow{0}$ résulte du calcul suivant.
$(v\mid v)=\sum\limits_{j,k=0}^{m}(u_j\mid u_k)=\sum\limits_{k=0}^{m}\|u_k\|^2+\sum\limits_{j\neq k}(u_j\mid u_k)=m+1+(m+1)m\Big(-\dfrac{1}{m}\Big)=0$

6. (a) La famille u_0,u_1 définie par un vecteur unitaire u_0 et par $u_1=-u_0$ convient.

(b) On se donne deux vecteurs unitaires et orthogonaux e_1 et e_2 .
On pose $u_0=e_1$, $u_1=-\dfrac{1}{2}e_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $u_2=-\dfrac{1}{2}e_1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$.
Ces trois vecteurs unitaires conviennent (produits scalaires égaux à $-1/2$).

(c) Par construction, pour tout k de $\{0,\ldots,m-1\}$, v_k est unitaire et $(v_k\mid v_n)=-\dfrac{1}{m}$.
Il reste à montrer que $(v_i\mid v_j)=-\dfrac{1}{m}$ pour tous i,j distincts dans $\{0,\ldots,m-1\}$.
Effectivement, en utilisant $(v_n\mid u_i)=(v_n\mid u_j)=0$ et $(u_i\mid u_j)=-\dfrac{1}{m-1}$:

$$\begin{aligned}(v_i\mid v_j)&=\Big(-\frac{1}{m}v_n+\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}\,u_i\;\Big|\;-\frac{1}{m}v_n+\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}\,u_j\Big)\\&=\frac{1}{m^2}+\Big(1-\frac{1}{m^2}\Big)\Big(-\frac{1}{m-1}\Big)=-\frac{1}{m}\end{aligned}$$

(d) La méthode précédente montre (par une récurrence finie, et en partant de deux vecteurs unitaires opposés) qu'on peut donc former (dans un espace euclidien E de dimension n) une famille de $n+1$ vecteurs unitaires distincts équidistants $u_0,\ldots,u_n$ (on ne peut pas faire "mieux").
On a alors $(u_i\mid u_j)=-1/n$ donc $\|u_j-u_i\|=\sqrt{2(1+1/n)}$ pour tous $i\neq j$.
Autre propriété : $\sum\limits_{k=0}^{n}u_k=\overrightarrow{0}$ et la famille $u_0,\ldots,u_n$ est de rang n (si on lui retire un vecteur quelconque, on obtient une base de E).