

Lundi 27 Février 2017

Polynômes

Problème A Polynômes de Tchebychev

Partie I

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

- 1.a Expliciter T_2 et T_3 .
- 1.b Déterminer le degré du polynôme T_n ainsi que son coefficient dominant.
- 2.a Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$.
- 2.b En déduire les valeurs de $T_n(1)$ et $T'_n(1)$.
- 2.c Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.
Combien y en a-t-il ? Qu'en déduire ?

Partie II

L'objectif de cette partie est de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ où $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

- 1.a Réaliser la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)}$.
En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$ et que pour tout $n \geq 1, S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
- 1.b Etablir que la suite (S_n) converge. On note ℓ sa limite.
2. On introduit $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$.
 - 2.a Former une relation exprimant S_{2n} en fonction de S_n et S'_n .
 - 2.b En déduire que (S'_n) converge et exprimer sa limite ℓ' en fonction de ℓ .
Nous allons maintenant poursuivre l'étude en calculant ℓ' à l'aide des polynômes de Tchebychev :
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ les racines de T_n .
 - 3.a Etablir l'égalité $\frac{T'_n}{T_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k}$.
 - 3.b En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2$,
puis les valeurs des sommes : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}}$.
- 4.a Justifier par un argument de convexité que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin x \leq x \leq \tan x$
- 4.b En déduire un encadrement de S'_n puis les valeurs de ℓ' et ℓ .

Problème B Polynômes de Chebyshev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de la manière suivante :

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} : T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

Première partie

1. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5 .
2. Montrer que pour tout entier n :
 - (a) T_n est de degré n et son terme dominant est $2^{n-1}X^n$.
 - (b) T_n a la parité de n .
 - (c) $T_n(1) = 1$.
3. Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.
4. Prouver que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, T_m(T_n(X)) = T_{mn}(X)$.
En déduire un isomorphisme entre (\mathbb{N}, \times) et $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Deuxième partie

1. Montrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$ et $T_n(\cosh \alpha) = \cosh(n\alpha)$.
2. Etablir que, pour tout $n \geq 1$, les zéros de T_n sont réels, distincts deux à deux, qu'ils sont dans $] -1, 1[$, et qu'ils sont donnés par $\forall k = 0, \dots, n-1 : x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$.
3. (a) Montrer que : $\forall \alpha \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}, T'_n(\cos \alpha) = n \frac{\sin(n\alpha)}{\sin \alpha}$.
(b) En déduire les extrémums de T_n (avec $n \geq 2$) et en quels points ils sont atteints.
4. Pour $n \geq 1$, décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - X^2)T''_n - XT'_n + n^2T_n = 0$.

Troisième partie

Dans cette partie, P est un polynôme à coefficients réels de monôme dominant λX^n , avec $n \geq 1$.

1. Montrer que $\sup\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} \geq \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
Indication : Raisonner par l'absurde et considérer le polynôme $Q = 2^{n-1}P - \lambda T_n$.
2. Plus généralement, montrer que $\forall a, b : \sup\{|P(x)|, a \leq x \leq b\} \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
Indication : Utiliser un changement de variable pour se ramener au segment $[-1, 1]$.

Lundi 27 Février 2017

Polynômes

Corrigé

Partie I

- 1.a $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.
- 1.b Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $\deg T_n = n$.
 Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok
 Supposons la propriété établie aux rangs $n \geq 0$ et $n + 1$. Au rang $n + 2$:
 On sait $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
 Par hypothèse de récurrence $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n+1} = n + 1$ d'où $\deg XT_{n+1} = n + 2$.
 Par somme de polynômes de degré distincts : $\deg T_{n+2} = n + 2$.
 Récurrence établie.
 Les coefficients dominants de T_0 et T_1 valent 1.
 Pour $n \geq 1$, la relation $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, implique, connaissant le degré de chaque polynôme, que le coefficient dominant de T_{n+1} est le double de celui de T_n .
 Par suite, pour $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .
- 2.a Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$:
 Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok
 Supposons la propriété établie aux rangs $n \geq 0$ et $n + 1$. Au rang $n + 2$:
 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(n+1)\theta - \cos n\theta = \cos(n+2)\theta$.
 Récurrence établie.
- 2.b Pour $\theta = 0$, $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ donne $T_n(1) = 1$.
 En dérivant la relation $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$, on obtient $-\sin \theta T'_n(\cos \theta) = -n \sin n\theta$
 donc pour $\theta \in]0, \pi[$, $T'_n(\cos \theta) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}$.
 Quand $\theta \rightarrow 0$, $T'_n(\cos \theta) \rightarrow T'_n(1)$ et $\frac{n \sin n\theta}{\theta} \sim n^2$ donc $T'_n(1) = n^2$.
- 2.c Soit $x \in [-1, 1]$ une racine de T_n .
 Pour $\theta = \arccos x \in [0, \pi]$ on a $x = \cos \theta$ et $T_n(x) = \cos n\theta = 0$.
 Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ puis $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$
 Sachant $\theta \in [0, \pi]$, on peut affirmer $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
 Ainsi $x = \cos \frac{\pi}{2n}, \cos \frac{3\pi}{2n}, \dots$, ou $\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}$.
 Inversement, par calculs, ces éléments sont racine de T_n .
 Ainsi les racines de T_n sont les x_1, \dots, x_n avec $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$.
 Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ les $\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ sont des éléments deux à deux distincts de $[0, \pi]$.
 La fonction cosinus étant injective sur $[0, \pi]$, on peut dire que les x_1, \dots, x_n sont deux à deux distincts.
 Le polynôme T_n possède donc n racines dans l'intervalle $[-1, 1]$.
 Or $\deg T_n = n$, on peut donc affirmer qu'il n'y a pas d'autres racines et que ces dernières sont simples.

Partie II

1.a
$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{X-(X-1)}{X(X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}.$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Pour tout $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ donc

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1.b $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ donc (S_n) est croissante. De plus (S_n) est majorée par 2 donc (S_n) converge.

2.a $S_{2n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$. En séparant les termes d'indices pairs et impairs :

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) + \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right) = \frac{1}{4} S_n + S'_n.$$

2.b $S'_n = S_{2n} - \frac{1}{4} S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} \ell$ car $S_{2n}, S_n \rightarrow \ell$.

3.a T_n étant de coefficient dominant 2^{n-1} et de racines x_1, \dots, x_n , on peut écrire :

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{\ell=1}^n (X - x_\ell). \quad T'_n = 2^{n-1} \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n (X - x_\ell) \quad \text{puis} \quad \frac{T'_n}{T_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k}.$$

3.b L'évaluation de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k} = \frac{T'_n}{T_n}$ en 1 donne $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2$.

Sachant $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} = 2n^2$.

soit encore $\sum_{k=1}^n 1 + \frac{\cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} = 2n^2$ d'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} = 2n^2 - n$.

4.a La fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2[$ donc en dessous de sa tangente en 0 d'équation $y = x$.

La fonction tangente est convexe sur $[0, \pi/2[$ donc au dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = x$.

Ainsi $\forall x \in [0, \pi/2[$, $\sin x \leq x \leq \tan x$.

4.b $\forall x \in]0, \pi/2[$, $\frac{1}{\tan^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$.

Pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $x = \frac{(2k-1)\pi}{4n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

donc : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{16n^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}}$,

puis : $\frac{(2n^2 - n)\pi^2}{16n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \leq \frac{\pi^2}{8}$

Par le théorème des gendarmes : $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{8} = \ell'$ puis $\ell' = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

Corrigé Problème B

Première partie

1. On trouve successivement :

$$T_2(X) = 2X T_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1.$$

$$T_3(X) = 2X T_2(X) - T_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X.$$

$$T_4(X) = 2X T_3(X) - T_2(X) = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1.$$

$$T_5(X) = 2X T_4(X) - T_3(X) = 2X(8X^4 - 8X^2 + 1) - (4X^3 - 3X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X.$$

2. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, on va montrer la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n)$: “Il existe U_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $T_n(X) = 2^{n-1}X^n + U_n(X)$ ”.

La propriété est vraie si $n = 1$ et $n = 2$, avec $U_1 = 0$ et $U_2 = -1$.

On se donne maintenant $n \geq 1$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(X) &= 2X T_{n+1}(X) - T_n(X) = 2X(2^n X^{n+1} + U_{n+1}(X)) - 2^{n-1}X^n - U_n(X) \\ &= 2^{n+1}X^{n+2} + U_{n+2}(X) \text{ avec } U_{n+2}(X) = 2X U_{n+1}(X) - 2^{n-1}X^n - U_n(X) \end{aligned}$$

Puisque $\deg(U_n) \leq n-1$, $\deg(U_{n+1}) \leq n$, U_{n+2} est bien dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout n de \mathbb{N}^* , T_n est de degré n et de terme dominant $2^{n-1}X^n$.

(b) Il suffit de prouver, pour tout n de \mathbb{N} , la propriété $\mathcal{P}(n)$: $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

Elle est vraie si $n = 0$ (car T_0 est pair) et si $n = 1$ (car T_1 est impair).

On se donne $n \geq 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

On en déduit :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) \\ &= (-1)^{n+2}(2X T_{n+1}(X) - T_n(X)) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(X) \end{aligned}$$

Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout n de \mathbb{N} , le polynôme T_n a la parité de n .

(c) La relation $T_{n+2}(X) = 2X T_{n+1}(X) - T_n(X)$ donne $T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1)$.

Or $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Une récurrence évidente donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(1) = 1$.

3. On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : “ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq m \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$ ”.

On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geq 0$.

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est évidente (car $T_0 = 1$), et la propriété $\mathcal{P}(1)$ n'est autre que la relation connue entre les polynômes T_{n-1} , T_n et T_{n+1} (car $T_1 = X$).

On se donne $m \geq 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.

On a donc les égalités $\begin{cases} (E_0) : 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m} \\ (E_1) : 2T_n T_{m+1} = T_{n+m+1} + T_{n-m-1} \end{cases}$ valables pour $n \geq m+2$.

On forme alors $2X(E_1) - (E_0)$ et on obtient :

$$2T_n(2X T_{m+1} - T_m) = (2X T_{n+m+1} - T_{n+m}) + (2X T_{n-m-1} - T_{n-m}), \text{ c'est-à-dire}$$

$$2T_n T_{m+2} = T_{n+m+2} + T_{n-(m+2)}, \text{ ce qui prouve } \mathcal{P}(m+2) \text{ et achève la récurrence.}$$

4. On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, T_m(T_n(X)) = T_{mn}(X)$.

On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geq 0$.

Les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont évidentes car $T_0 = 1$ et $T_1 = X$.

On se donne $m \geq 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.

On substitue $T_n(X)$ à X dans l'égalité $T_{m+2}(X) = 2X T_{m+1}(X) - T_m(X)$.

On en déduit, pour tout n de \mathbb{N} , et en utilisant $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$:

$$T_{m+2}(T_n(X)) = 2T_n(X) T_{m+1}(T_n(X)) - T_m(T_n(X)) = 2T_n(X) T_{(m+1)n}(X) - T_{mn}(X)$$

Mais d'après (3) on a $2T_n T_{(m+1)n} = T_{(m+2)n} - T_{mn}$.

On en déduit $T_{m+2}(T_n(X)) = T_{(m+2)n}(X)$, ce qui prouve $\mathcal{P}(m+2)$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout m, n de \mathbb{N} , on a : $T_m(T_n(X)) = T_{mn}(X)$.

L'application $\varphi : n \rightarrow T_n$ est injective ($n < m \Rightarrow \deg(T_n) < \deg(T_m) \Rightarrow T_n \neq T_m$).

Elle est donc bijective de \mathbb{N} sur $\mathcal{T} = \{T_n, n \in \mathbb{N}\}$.

De plus elle vérifie $\varphi(mn) = T_{mn} = T_m(T_n) = \varphi(m) \circ \varphi(n)$.

L'application φ est donc un isomorphisme de (\mathbb{N}, \times) sur (\mathcal{T}, \circ) .

Deuxième partie

1. Soit α un réel donné. Posons $u_n = \cos(n\alpha)$.

On va prouver $T_n(u_1) = u_n$ par récurrence sur n . C'est évident si $n = 0$ et si $n = 1$.

On suppose que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, avec $n \geq 0$.

Alors pour tout $n \geq 0$, et en utilisant la relation $2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$:

$$T_{n+2}(u_1) = 2u_1 T_{n+1}(u_1) - T_n(u_1) = 2u_1 u_{n+1} - u_n = (u_{n+2} + u_n) - u_n = u_{n+2}$$

Ce qui démontre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

Pour l'égalité $T_n(\cosh \alpha) = \cosh(n\alpha)$, c'est exactement la même méthode, en utilisant cette fois la relation $2 \cosh x \cosh y = \cosh(x+y) + \cosh(x-y)$.

2. Comme le suggère l'énoncé, on recherche des racines de T_n sur $] -1, 1[$.

Pour tout x de $] -1, 1[$, il existe α dans $] 0, \pi[$ tel que $x = \cos \alpha$.

Alors : $T_n(x) = 0 \Leftrightarrow T_n(\cos \alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\alpha) = 0 \Leftrightarrow n\alpha = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Cette dernière condition s'écrit $n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $0 \leq k < n$ (car $0 < n\alpha < n\pi$).

On a donc obtenu les $x_k = \cos \alpha_k$, avec $\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, et $0 \leq k \leq n-1$.

Les α_k forment une suite strictement croissante de $] 0, \pi[$.

Les x_k forment donc une suite strictement décroissante de $] -1, 1[$.

Dans l'intervalle $] -1, 1[$, on a ainsi obtenu n racines distinctes de T_n .

Mais, comme T_n est de degré n , on a obtenu toutes les racines de T_n .

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, le polynôme T_n possède n racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $] -1, 1[$, et données par $x_k = \cos \alpha_k$, avec $\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, et $0 \leq k \leq n-1$.

3. (a) Pour tout α de \mathbb{R} , et pour tout n de \mathbb{N} , on a $T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$.

On dérive cette égalité par rapport à α et on obtient : $(\sin \alpha)T'_n(\cos \alpha) = n \sin(n\alpha)$.

En particulier, pour tout α de $]0, \pi[$ et n de \mathbb{N} , on a $T'_n(\cos \alpha) = \frac{n \sin(n\alpha)}{\sin \alpha}$.

(b) Pour $n \geq 2$, T_n a n racines distinctes x_k avec $1 > x_0 > x_1 > \dots > x_{n-1} > -1$.

Par "Rolle", T'_n s'annule sur chacun des $n-1$ intervalles ouverts $]x_{k+1}, x_k[$.

Mais T'_n est de degré $n-1$. On obtient ainsi toutes ses racines.

On remarque que si $x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ (avec $1 \leq k \leq n-1$) on a $T'_n(x'_k) = \frac{n \sin(k\pi)}{\sin(k\pi/n)} = 0$.

Pour tout k de $\{1, \dots, n-1\}$, on a $\alpha_{k-1} < \frac{k\pi}{n} < \alpha_k$ donc $x_{k-1} > x'_k > x_k$.

Ainsi $1 > x_0 > x'_1 > x_1 > x'_2 > x_2 > \dots > x'_{n-1} > x_{n-1} > -1$.

Les réels x'_1, \dots, x'_n sont donc les n racines de T'_n .

En ces points, T'_n change de signe (racine simple) donc T_n présente un extrémum.

Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, on a $T_n(x'_k) = T_n\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

On a ainsi obtenu tous les extrémums de T_n sur $[-1, 1]$.

NB : on savait déjà que $|T_n(x)| \leq 1$ sur $[-1, 1]$, à cause $T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$ qui peut s'écrire $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ pour tout x de $[-1, 1]$.

4. Pour $n \geq 1$, T_n a n racines distinctes x_k avec $1 > x_0 > x_1 > \dots > x_{n-1} > -1$.

La décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{T_n}$ s'écrit donc $\frac{1}{T_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - x_k}$.

On a alors $\lambda_k = \frac{1}{T'_n(x_k)} = \frac{1}{T'_n(\cos \alpha_k)} = \frac{\sin \alpha_k}{n \sin(n\alpha_k)}$.

Or $\sin(n\alpha_k) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$ donc $\lambda_k = \frac{(-1)^k \sin \alpha_k}{n}$.

On a donc obtenu la décomposition en éléments simples $\frac{1}{T_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin \alpha_k}{X - x_k}$

5. Pour tout α de \mathbb{R} , et pour tout n de \mathbb{N} , on a $T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$.

On dérive une première fois par rapport à α et on obtient : $(\sin \alpha)T'_n(\cos \alpha) = n \sin(n\alpha)$.

On dérive une deuxième fois par rapport à α et on obtient :

$$(\cos \alpha)T'_n(\cos \alpha) - (\sin^2 \alpha)T''_n(\cos \alpha) = n^2 \cos(n\alpha).$$

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (\cos \alpha)T'_n(\cos \alpha) + (\cos^2 \alpha - 1)T''_n(\cos \alpha) = n^2 T_n(\cos \alpha)$.

Quand α parcourt \mathbb{R} , $x = \cos \alpha$ parcourt $[-1, 1]$.

On a donc obtenu $xT'_n(x) + (x^2 - 1)T''_n(x) = n^2 T_n(x)$ pour tout n de \mathbb{N} et tout x de $[-1, 1]$.

Mais quand une égalité de fonctions polynomiales est vraie sur $[-1, 1]$ (ou plus généralement sur un ensemble infini) alors elle est vraie partout.

On a donc obtenu : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (1 - x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2 T_n(x) = 0$.

Ou encore (égalité entre polynômes) : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - X^2)T''_n - XT'_n(X) + n^2 T_n = 0$.

Troisième partie

1. On se donne P dans $\mathbb{R}_n[X]$, de monôme dominant λX^n , avec $n \geq 1$.

Par l'absurde, on suppose que $\sup\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} < \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$.

On considère alors le polynôme $Q = 2^{n-1}P - \lambda T_n$, visiblement dans $\mathbb{R}_n[X]$.

En fait $\deg Q \leq n-1$ car $2^{n-1}P$ et λT_n ont deux $2^{n-1}\lambda X^n$ pour terme dominant.

Rappelons que si $x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ (avec $1 \leq k \leq n-1$), on a $T_n(x'_k) = (-1)^k$.

Cette égalité est encore vraie si $k=0$ car alors $x'_0 = 1$ et on sait que $T_n(0) = 1$.

Elle est encore vraie si $k=n$ donc $x'_n = -1$ car $T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n$.

Ainsi on a $T_n(x'_k) = (-1)^k$ pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, avec $x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}$.

On a alors $Q(x'_k) = 2^{n-1} \left(P(x'_k) - \frac{\lambda}{2^{n-1}} (-1)^k \right)$.

Or on sait que $|P(x'_k)| < \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$ pour tout k .

Il en résulte que les quantités $Q(x'_k)$ sont alternativement strictement positives et strictement négatives. En particulier le polynôme Q s'annule au moins une fois sur chacun des n intervalles $]x'_{k+1}, x'_k[$, avec $0 \leq k \leq n-1$.

Mais $\deg Q < n$, et on vient de trouver au moins n racines distinctes pour Q .

La seule possibilité est donc $Q = 0$, c'est-à-dire $P = \frac{\lambda}{2^{n-1}} T_n$.

Mais c'est absurde car cela donne $\sup\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} = \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$.

Conclusion : avec les hypothèses de départ, on a $\sup\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} \geq \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$.

Remarque : on peut choisir $P = T_n$, auquel cas $\lambda = 2^{n-1}$. Dans ce cas, on voit que l'inégalité précédente est en fait une égalité. On peut prouver que cette égalité caractérise le polynôme de Chebyshev T_n parmi tous les polynômes de degré n .

2. On se place cette fois-ci sur $[a, b]$, avec $a < b$.

On définit un polynôme R de degré n par $R(x) = P(t)$, avec $t = \frac{a+b}{2} + x \frac{b-a}{2}$.

(on voit bien que quand x parcourt $[-1, 1]$, t parcourt $[a, b]$).

R est un polynôme de degré n et dont le terme dominant est $\mu = \lambda \left(\frac{b-a}{2} \right)^n$.

D'après (III.1) on a $\sup\{|R(x)|, x \in [-1, 1]\} \geq \frac{|\mu|}{2^{n-1}}$.

Mais $\sup\{|R(x)|, x \in [-1, 1]\} = \sup\{|P(t)|, t \in [a, b]\}$.

On a donc finalement obtenu l'inégalité $\sup\{|P(t)|, a \leq t \leq b\} \geq \left(\frac{b-a}{2} \right)^n \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$.