Lundi 20 Mars 2017

Espaces Vectoriels

Polynômes-Fractions Rationnelles

Durée : 4 heures

Documents & Calculatrices Non Autorisées

Blaque du jour

Deux personnes qui viennent de faire connaissance dans un café discutent :

- Moi, confie le premier, je ne crois que la moitié de ce qu'on me dit.
- Vraiment ! Et quelle est votre profession ?
- Psychanalyste.
- Ah ! Eh bien, moi, c'est tout le contraire : je crois toujours le double de ce que l'on me raconte.
- Quelle est donc votre profession ?
- Inspecteur des impôts.

Marin Mersenne (1588-1648)

Religieux, mathématicien et philosophe français. Il s'intéressait aussi à la théorie de la musique. Il établit les plans du premier sous-marin jamais construit, malheureusement. Les nombres premiers de Mersenne sont encore, à l'heure actuelle, l'objet d'une recherche active

Question de Cours : Niveau 0

1. Soient P et Q deux polynômes. Quand $\deg(P+Q) = \deg P$.
2. Rappeler les définitions de : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
3. Soit u application linéaire de E vers F. Compléter les assertions suivantes :
   - i u est injective $\Leftrightarrow \ker u = \ldots$.
   - ii u est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} u = \ldots$.
4. Soit u application linéaire de E vers F, et $\mathcal{B}$ famille d'éléments de E.
   - i Si $\mathcal{B}$ est liée dans E, à quelle condition sur u, la famille $u(\mathcal{B})$ est liée dans F ?
   - ii Si $\mathcal{B}$ est libre dans E, à quelle condition sur u, la famille $u(\mathcal{B})$ est libre dans F ?
   - iii Si $\mathcal{B}$ est génératrice pour E, à quelle condition sur u, la famille $u(\mathcal{B})$ est génératrice pour F ?
   - iv Si $\mathcal{B}$ est une base de E, à quelle condition sur u, la famille $u(\mathcal{B})$ est une base de F ?

Exercice I (Application de cours) : Niveau I

$$\text{On note } F(X) = \frac{X^6+1}{(X+1)^3(X^2+X+1)} \in \mathbb{R}(X).$$

Q1) Factoriser X^6+1 dans $\mathbb{R}[X]$, en déduire que $F(X)$ est irréductible.

Q2) Calculer $E(X)$ la partie entière de la fraction $F(X)$.

Q3) Justifier l'existence des nombres a, b, c, α et β tels que :

$$F(X) = E(X) + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{(X+1)^3} + \frac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1}$$

Sans calculer a**,** b **et** c, déterminer α et β en expliquant la méthode.

Q4) Soit $H(X) = (X+1)^3F(X) = \dfrac{X^6+1}{X^2+X+1}$.

a) Montrer que pour x réel : $H(x) = c + b(x+1) + a(x+1)^2 + \underset{-1}{o}\left((x+1)^2\right)$.

b) Que représente cette égalité pour la fonction $x \mapsto H(x)$ en -1 ?

c) Calculer soigneusement un développement limité d'ordre 2 en -1 de $H(x)$. En déduire les valeurs numériques des nombres a, b et c (justifier).

Q5) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto F(x)$ sur $I =]-1;+\infty[$.

Q6) a) Sans calcul, donner un équivalent très simple de $F(x) - E(x)$ en $+\infty$.

b) En déduire l'étude locale de la fonction $x \mapsto F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice II (Application de cours) : Niveau I

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (-x+y+z; -x+z; -x+z).$$

Q1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$. Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$, on exprimera ces ensembles sous la forme $\operatorname{Vect}[\ldots]$.

Q2) a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$, calculer $f^2(x,y,z)$ et $f^3(x,y,z)$.

b) Vérifier que $f^3 = -f$. En déduire f^4 et f^5.

Q3) Soit $G = \{f, f^2, f^3, f^4\}$.

a) Faire la table de G pour la loi de composition. En déduire que $(G, \circ)$ est un groupe commutatif.

b) Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $\ker(v) \subset \ker(u \circ v)$ et que $\operatorname{Im}(u \circ v) \subset \operatorname{Im}(u)$.

c) En déduire que tous les éléments du groupe $(G, \circ)$ ont le même noyau et la même image.

Q4) Montrer que f^4 est un projecteur, préciser.

Problème I : Niveaux II-III
...

Interpolation et polynômes factoriels

Notations :

n est un entier naturel fixé, $n \geq 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) \text{ et } T(f)(x) = f(x+1).$$

On admettra (aisément !) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ (donc si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1} \text{ et } T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}.$$

1. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
   Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
   Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
2. On note Δ_n la restriction de Δ au départ de E_n.

2.a Vérifier que Δ_n réalise un endomorphisme de E_n.

2.b Déterminer $\ker \Delta_n$.
En déduire le rang de Δ_n et déterminer $\mathrm{Im}\,\Delta_n$.

3. Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme Δ est surjectif.

Partie II

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

2. $$\forall x \in \mathbb{R}, N_0(x) = 1 \text{ et } N_k(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

1.a Pour $k \geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction de l'un des polynômes $(N_j)_{j\geq 0}$.

1.b Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$ puis $(\Delta^j(N_k))(0)$.

2.a Montrer que la famille $(N_0, N_1, \ldots, N_n)$ est une base de E_n.

2.b Soit $P \in E_n$, P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \ldots + a_n N_n$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Exprimer les a_j en fonction des $(\Delta^j(P))(0)$.

3. Applications :
   On pose $P(x) = x^2$. Déterminer les coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; : \; P(x) = aN_0(x) + bN_1(x) + cN_2(x)$$

et en déduire une fonction polynôme Q telle que $\Delta(Q) = P$.

Exploiter celle-ci pour exprimer $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

4. Soit $f \in \mathcal{F}$.

4.a Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $(T^k(f))(x)$.

4.b Etant donné $n \in \mathbb{N}$, expliciter $\Delta^n(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leq k \leq n$.

(on pourra remarquer que $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$).

4.c En déduire que $(\Delta^n(f))(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0, 1, \ldots, n$.

Partie III

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \deg P \leq n \\ \forall k \in \{0,1,\ldots,n\}, P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose :

$$N(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - j) = x(x-1)\ldots(x-n).$$

1. Soit l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : E_n &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(0), \ldots, P(n)) \end{aligned}$$

Montrer que φ est un isomorphisme.

1.b En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2.a Pour $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, comparer $(\Delta^j(f))(0)$ et $(\Delta^j(P_f))(0)$.

2.b En déduire l'expression de P_f en fonction des $(\Delta^j(f))(0)$ et des polynômes N_j.

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On note :

$$M_{n+1} = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, t \in [0,n]\right\}.$$

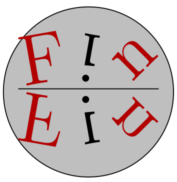
3.a Soit $x \in [0,n]$, non entier. Montrer que :

$$\exists \xi \in [0,n], f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} N(x).$$

On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$ et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.

3.b En déduire que $\forall x \in [0,n], \left|f(x) - P_f(x)\right| \leq \dfrac{1}{n+1} M_{n+1}$

On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.



d'après Mines de Sup 1995

Correction

Partie I

1. Si P est un polynôme constant alors $\Delta(P)=0$ ce qui en détermine degré et coefficient dominant.

Si P est un polynôme non constant, posons p son degré, on peut écrire $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ (avec $a_p \neq 0$) et on a $\Delta(P)=\sum_{k=0}^{p} a_k \Delta(X^k)$ avec $\Delta(X^0)=0$ et $\Delta(X^k)=(X+1)^k - X^k = kX^{k-1}+\cdots$ pour $k\geq 1$. Par suite $\Delta(P)=pa_pX^{p-1}$ donc $\deg\Delta(P)=p-1$ et le coefficient dominant de $\Delta(P)$ est pa_p où a_p désigne le coefficient dominant de P.

2.a Δ_n est linéaire car restriction d'une application linéaire, de plus ci-dessus, on a vu que si $\deg P\leq n$ alors $\deg\Delta(P)\leq n-1\leq n$ donc $\Delta_n : E_n \to E_n$ et ainsi Δ_n est un endomorphisme de E_n.

2.b En 1, on a obtenu : si P est constant $\Delta(P)=0$ et si P non constante $\Delta(P)\neq 0$. Le noyau de Δ_n est donc réduit à l'ensemble des polynômes constants. Ainsi $\dim\ker\Delta_n = 1$ et par le théorème du rang $\operatorname{rg}\Delta_n = \dim E_n - 1 = n$. De plus si $P\in E_n$ alors on a $\deg\Delta(P)\leq n-1$ donc $\Delta(P)\in E_{n-1}$. Par suite $\operatorname{Im}\Delta_n \subset E_{n-1}$. Par inclusion et égalité des dimensions : $\operatorname{Im}\Delta_n = E_{n-1}$.

3. $\forall P\in E$, on posant $n=\deg P$, il existe $Q\in E_{n+1}$ tel que $\Delta(Q)=P$ car Δ_{n+1} est un endomorphisme de E_{n+1} dont l'image est E_n.

Partie II

1.a $\Delta(N_k)(x) = N_k(x+1)-N_k(x) = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+2)}{k!}(x+1-(x-k+1)) = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+2)}{(k-1)!}$

donc $\Delta(N_k)=N_{k-1}$.

1.b Pour $j\leq k$: $\Delta^j(N_k)=N_{k-j}$ et puisque $\Delta(N_0)=0$, $\Delta^j(N_k)=0$ pour $j>k$.

Par suite $(\Delta^j(N_k))(0)=0$ si $j<k$ et si $j>k$ alors que $(\Delta^j(N_k))(0)=1$ si $j=k$.

2.a La famille $(N_0,N_1,...,N_n)$ vérifie $\deg N_k = k$ donc c'est une famille de polynôme de degrés étagés et par conséquent celle-ci est une base de E_n.

2.b $(\Delta^j(P))(0)=\sum_{k=0}^{n} a_k(\Delta^j(N_k))(0)=a_j$ puisque $(\Delta^j(N_k))(0)=\delta_{j,k}$.

3. $a=\Delta^0(P)(0)=0$, $b=\Delta^1(P)(0)=1$ et $c=\Delta^2(P)(0)=2$.

Considérons $Q=aN_1+bN_2+cN_3$. Par l'étude qui précède $\Delta(Q)=aN_0+bN_1+cN_2=P$.

Concrètement : $Q(x)=\dfrac{x(x-1)}{2}+2\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}=\dfrac{x(x-1)(2x-1)}{6}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} P(k) = \sum_{k=1}^{n}\Delta(Q)(k) = \sum_{k=1}^{n} Q(k+1)-Q(k) = Q(n+1)-Q(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.a Par récurrence $T^k(f)(x)=f(x+k)$.

4.b $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ avec T et $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ qui commutent donc par la formule du binôme de Newton :

$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}T^k$ puis $\Delta^n(f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}T^k(f)$.

4.c $(\Delta^n(f))(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(k)$ car $T^k(f)(0)=f(k)$.

Partie III

1.a Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in E_n$.
$\varphi(\lambda P+\mu Q)=(\dots,(\lambda P+\mu Q)(k),\dots)=(\dots,\lambda P(k)+\mu Q(k),\dots)=\lambda(\dots,P(k),\dots)+\mu(\dots,Q(k),\dots)$
donc $\varphi(\lambda P+\mu Q)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$ et φ est linéaire.
Soit $P\in E_n$. Si $\varphi(P)=(0,\dots,0)$ alors $P(0)=\dots=P(n)=0$ et donc le polynôme admet au moins $n+1$ racines or $\deg P\le n$ donc $P=0$. Ainsi $\ker\varphi=\{0\}$ or $\dim E_n=\dim\mathbb{R}^{n+1}$ donc φ est un isomorphisme.

1.b Par la bijectivité de φ, il existe un unique $P\in E_n$ tel que $\varphi(P)=(f(0),\dots,f(n))$. Par suite le problème $\mathcal{P}$ possède une unique solution.

2.a $(\Delta^j(f))(0)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}f(k)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}P(k)=(\Delta^j(P_f))(0)$.

2.b Rappelons que pour $P\in E_n$: $P=\sum_{j=0}^{n}a_jN_j$ avec $a_j=\Delta^j(P)(0)$ donc

$$P_f=\sum_{j=0}^{n}(\Delta^j(P_f))(0)N_j=\sum_{j=0}^{n}(\Delta^j(f))(0)N_j.$$

3.a Posons K une constante telle que $f(x)-P_f(x)=K.N(x)$. Une telle constante K existe car $N(x)\neq 0$ puisque $x\notin\mathbb{N}$.
Considérons alors $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=f(t)-P_f(t)-KN(t)$. φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui s'annule en $0,1,\dots,n$ et aussi en x. Cela fournit $n+2$ annulation dans $[0,n]$. Par application du théorème de Rolle, φ' s'annule au moins $n+1$ fois dans $[0,n]$ et en reprenant ce processus, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois dans $[0,n]$ en un certain ξ. Or $\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-0-(n+1)!K$ car $\deg P_f\le n$ et N est un polynôme unitaire de degré $n+1$ donc $N^{(n+1)}=(n+1)!$. La relation $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$ donne alors $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ ce qui permet de conclure.

3.b Pour $x\in\mathbb{N}\cap[0,n]$, $|f(x)-P_f(x)|=0\le\dfrac{1}{n+1}M_{n+1}$.
Pour $x\in[0,n]$, $x\notin\mathbb{N}$: $|f(x)-P_f(x)|=\dfrac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|N(x)|\le\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|N(x)|$.
Pour conclure, il reste à établir : $\forall x\in[0,n],|N(x)|\le n!$.
Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$, $N(x)=x$ et la propriété est vraie.
Supposons la propriété établie au rang $n\ge 1$:
Pour $x\in[0,n+1]$, étudions $N(x)=x(x-1)\times\dots\times(x-(n+1))=M(x)\times(x-n-1)$.
Par HR, pour $x\in[0,n]$, on a $|M(x)|\le n!$ donc $|N(x)|\le n!\times|x-n-1|$ avec $|x-n-1|\in[1,n+1]$ donc $|N(x)|\le(n+1)!$. Pour $x\in[n,n+1]$,
$|N(x)|=x(x-1)\times\dots\times(x-n)\times(n+1-x)\le(n+1)n\times\dots\times1\times1=(n+1)!$. Récurrence établie et problème résolu.