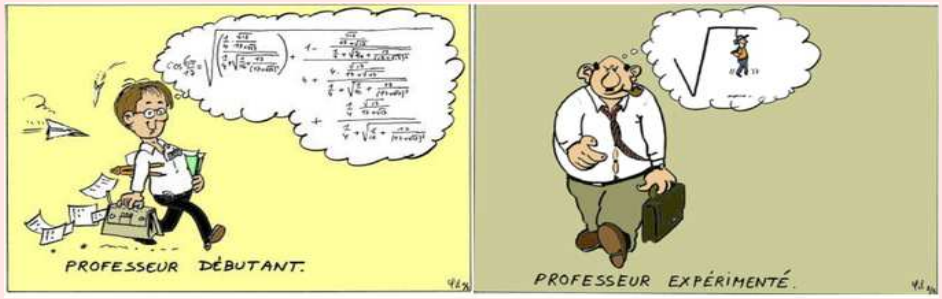
Samedi 3 Juin 2017

Calcul Matriciel

Espaces Préhilbertiens

Durée : 4 heures

Caricature du jour



David Hilbert (1862-1943)

Mathématicien allemand. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales, que ce soit la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie ou les fondements de l'analyse fonctionnelle (avec les espaces de Hilbert). En 1900, il posa ses fameux 10 problèmes ouvert qui ont durablement influencé les recherches mathématiques du xxe siècle. Hilbert et ses étudiants ont fourni une portion significative de l'infrastructure mathématique nécessaire à l'éclosion de la mécanique quantique et de la relativité générale.

Questions de Cours (Niveau 1 =10 points)

1. Rappeler la définition de $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$. Que vaut $P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$?
2. Rappeler la définition de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. Compléter $\mathcal{M}_{\mathcal{B}(\sqcap\circ\sqsubseteq)} = \dots$
3. Si $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, compléter $\det(\lambda A) = \cdots$
4. Rappeler la relation une matrice et la transposé de sa comatrice.
5. Rappeler la définition de système de Cramer. Donner un exemple
6. Donner un système linéaire à 3 inconnues dont 2 sont principales
7. Quelle différence entre projeteur et projecteur orthogonal et comment les distinguer à l'aide de leurs matrices ?
8. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ bon de E et $x, y \in E$, compléter les assertions suivantes
   - i. $x = \dots$
   - ii. $\langle x, y\rangle = \dots$
   - iii. $\|x\|^2 = \dots$

Exercices Applications de Cours (Niveau 2 =10 points)

© Faidherbe, Lille

Exercice 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe un unique couple (S, A) où $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$.

Donner ce couple lorsque $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $M = A - I_3$. Calculer M^2, en déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

Exercice 3

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4

A l'aide du Pivot de Gauß, donner une matrice échelonnée équivalente à M et préciser le rang de M lorsque

① $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ② $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ ③ $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 5 \\ -1 & 1 & m \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$

Exercice 5

Résoudre, avec la méthode du pivot de Gauß, les systèmes suivants :

① $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 6x + 5y = 1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2y - 6z = 9 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \\ 2x + y + t = 1 \end{cases}$

Problème 1 (Niveau 3 =15 points)

© Mathprepa

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Calcul de l'inverse de A**
   (a) Calculer $A^2 - 3A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
   (b) Retrouver l'inversibilité de A et la valeur de A^{-1} par la méthode du pivot.

2. **Calcul des puissances de A**
   (a) *Première méthode*
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $B_n = A^n + A - 2I$ (par convention $A^0 = I$.)
   i. Montrer successivement que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
   $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$; $A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I$; $B_{n+2} = 2B_{n+1}$
   ii. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (b) *Deuxième méthode*
   On pose $C = A - I$ et $D = 2I - A$.
   i. Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer C^n et D^n.
   ii. Exprimer A en fonction de C et D. Retrouver ainsi A^n pour n dans $\mathbb{N}$.
   (c) *Troisième méthode*
   i. Montrer qu'il existe des suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \alpha_n A + \beta_n I$.
   ii. Calculer α_n et β_n et retrouver ainsi l'expression de A^n.
   (d) *Quatrième méthode*
   On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   i. Calculer P^{-1} puis $\Delta = P^{-1}AP$.
   ii. En déduire à nouveau l'expression de A^n, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (e) *Puissances négatives de A*
   La formule donnant A^n est-elle encore vraie pour les exposants strictement négatifs ?

3. **Matrices commutant avec A**
   Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}(M) = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ MN = NM\}$.
   (a) Pour M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{C}(M)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer si N est inversible, alors $N \in \mathcal{C}(M) \Rightarrow N^{-1} \in \mathcal{C}(M)$.
   (c) Déterminer $\mathcal{C}(\Delta)$.
   (d) Soient M, N dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et soit Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer l'équivalence : $N \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow Q^{-1}NQ \in \mathcal{C}(Q^{-1}MQ)$.
   (e) En utilisant la question $(2.d.i)$, déterminer $\mathcal{C}(A)$.
   Indication : on cherchera à obtenir le résultat sous la forme $N = \sum_{k=1}^{5} \lambda_k J_k$, où les λ_k sont des réels quelconques et où les J_k sont des éléments fixés de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Problème 2 (Niveau 4 =10 points)

© mpsidll

Endomorphismes commutant avec les translations

On note $\mathcal{B}=(1,X,...,X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I

On considère une suites de réels deux à deux distincts : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note M_n la matrice carrée d'ordre $n+1$ dont l'élément d'indice (i,j) est a_{j-1}^{n-i+1}.

Autrement dit : $M_n=\begin{pmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

On pose V_n son déterminant que nous allons calculer maintenant :

1. On introduit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\begin{vmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n & x^n \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & x \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.a Justifier que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

Exprimer le coefficient λ de x^n dans $f(x)$ à l'aide de l'un des termes de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.b Justifier que $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ sont racines de f.

1.c En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)$.

1.d Conclure : $\forall n\in\mathbb{N}^*, V_n=\prod_{0\le i<j\le n}(a_i-a_j)$.

2. On considère $n+1$ nombres réels deux à deux distincts : $a_0,a_1,...,a_n$ et on considère la famille de polynômes : $\mathcal{C}=(P_k)_{0\le k\le n}$ où $P_k=(X+a_k)^n$.

2.a Former la matrice représentative de la famille $\mathcal{C}$ relative à la base $\mathcal{B}$.

2.b Etablir que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II

On désigne par n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $h\in\mathbb{R}$, on définit une application T_h en posant pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$: $T_h(P)=P(X+h)$.

1.a Justifier que T_h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b Quel en est le déterminant ?

On désire déterminer l'ensemble E formée des endomorphismes φ de $\mathbb{R}_n[X]$ satisfaisant la propriété : $\forall h\in\mathbb{R}, \varphi\circ T_h=T_h\circ\varphi$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

3. On note D l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$ i.e. l'application $D:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ définie par $D:P\mapsto P'$.

3.a Etablir que $D\in E$.

3.b Justifier que $\forall k\in\{0,1,...,n\}$, $D^k\in E$.

3.c Etablir que la famille $(D^k)_{0\le k\le n}$ est libre.

4. Soit $\theta : E \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\theta(\varphi) = \varphi(X^n)$.

4.a Montrer que θ est une application linéaire.

4.b Etablir que θ est injective.

4.c Déterminer la dimension de E.

5. Donner une base de E.

Problème 3 (Niveau 5 =10 points) © Clemenceau, Nantes

Dans ce problème, on s'intéresse aux systèmes différentiels et aux suites récurrentes associées à une matrice antisymétrique de $\mathbb{R}^3$.
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
I_E désigne l'application identité de E.
Le produit scalaire de deux vecteurs X et Y de E est noté $\langle X, Y\rangle$.

Partie I – Endomorphisme antisymétrique

Soit u un endomorphisme non nul de E tel que : $\forall X \in E \quad \langle u(X), X\rangle = 0$.

1) Démontrer que : $\forall (X, Y) \in E \times E \quad \langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle$.

2) **a)** Démontrer que 0 est la seule valeur propre réelle possible de u.

b) Montrer que le polynôme caractéristique de u a au moins une racine réelle. Qu'en déduit-on pour $\operatorname{Ker} u$?

3) Démontrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

4) Soit X un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$.

a) Démontrer que $\big(X, u(X)\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Im} u$.

b) En déduire les dimensions de $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$.

5) Montrer qu'il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E et un réel α tels que la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u^0 = \mathrm{I}_E$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.

a) Démontrer que $u^2 = -\alpha^2 p$ où p est une projection orthogonale à préciser.

b) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u^n en fonction de α, p et u, en distinguant suivant la parité de n.

7) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{u^k}{k!}$ s'écrit $\mathrm{I}_E + C_N(\alpha)\, p + S_N(\alpha)\, u$ où C_N et S_N sont des polynômes.

b) Trouver les limites de $C_N(\alpha)$ et $S_N(\alpha)$ quand $N \to +\infty$.
On note ces limites $C(\alpha)$ et $S(\alpha)$, respectivement.

c) Caractériser géométriquement l'endomorphisme $\mathrm{I}_E + C(\alpha)\, p + S(\alpha)\, u$, que l'on note $\exp(u)$.

Corrigé

Exercices Applications de Cours (Niveau 2 =10 points)

Exercice 1

Solution : Unicité : Si $M = S_1 + A_1 = S_2 + A_2$ avec $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})^2$ et $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})^2$, alors par différence, on a

$$S_1 - S_2 = A_2 - A_1$$

La matrice $B = S_1 - S_2$ est donc symétrique et antisymétrique. On a donc ${}^tB = B = -B$ d'où $B = \bigcirc$. On en déduit que $S_1 = S_2$ et $A_1 = A_2$.

Existence : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, posons $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$, alors $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $M = S + A$.

Application : $S = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = M - S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Solution : Un calcul simple donne $M^2 = \bigcirc$. On en déduit que

$$(A - I_3)^2 = A^2 - 2AI_3 + I_3 = A^2 - 2A + I_3 = \bigcirc$$

Pour déterminer l'inverse de A, on exprime I_3 à l'aide de A et de A^2. On a donc

$$I_3 = 2A - A^2 = 2AI_3 - A^2 = A(2I_3 - A)$$

Ceci prouve que A est inversible et que $A^{-1} = 2I_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Attention à ne pas écrire que $I_3 = A(2 - A)$, cela n'a **aucun sens**, on ne peut faire la différence entre le nombre 2 et la matrice A !

Exercice 3

Solution : On accole à A la matrice identité pour obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On sait que si, par opérations élémentaires sur les lignes, on transforme A en I_4, alors la même suite d'opérations élémentaires transforme I_4 en A^{-1}. On a donc

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}_3 - 2\mathcal{L}_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \text{ d'où } A \text{ inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Solution : Pour ①, on a

$$M \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang vaut donc 2.
Pour ②, on a

$$M \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Le rang vaut 3
Pour ③, on a

$$M \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m \\ m & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 + mL_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m \\ 0 & m+1 & 5+m^2 \\ 0 & 1 & 5+3m \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \text{car } m^2+5-(m+1)(3m+5) = -2m^2-8m}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 3m+5 \\ 0 & m+1 & m^2+5 \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_3 - (m+1)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 3m+5 \\ 0 & 0 & -2m(m+4) \end{pmatrix}$$

On en déduit que :
Si $m(m+4) \neq 0$ (i.e. $m \neq 0$ et $m \neq -4$), le rang vaut 3
Si $m = 0$ ou $m = -4$, le rang vaut 2.

Exercice 5

Solution : Pour chaque système, on écrit la matrice augmentée.
Pour ①, on a

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 8 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \end{pmatrix}$$

d'où le système équivalent $\begin{cases} 3x = 8 \\ y = -3 \end{cases}$ qui donne la solution $x = \dfrac{8}{3}, y = -3$, soit $\mathcal{S} = \left\{ \left(\dfrac{8}{3}, -3 \right) \right\}$.
pour ②, on a

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 & 9 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -6 & 9 \\ 0 & \boxed{-1} & 11 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 16 & -23 \\ 0 & \boxed{-1} & 11 & -16 \end{pmatrix}$$

D'où le système équivalent $\begin{array}{l} \underline{\text{x}} + 16z = -23 \\ \boxed{\text{-y}} + 11z = -16 \end{array}$, on exprime x et y en fonction de z pour avoir

$$\begin{cases} x = -23 - 16z \\ y = 16 + 11z \\ z = z \end{cases} \quad \text{soit } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -23 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -16 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Géométriquement, on trouve une droite de l'espace.

Pour ③, on a

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \longleftarrow 4L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow 8L_1 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{8} & 16 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftarrow L_1 - 4L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{8} & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

On obtient le système équivalent $\begin{cases} \boxed{8x} + 2t = 4 \\ \boxed{4y} + 2t = 0 \\ \boxed{-8z} + 2t = -4 \end{cases}$ qui donne $z = \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{t}{2}$ et $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{4}$. D'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Problème 1 (Niveau 3 =15 points)

Pour ③, on a

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \longleftarrow 4L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow 8L_1 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{8} & 16 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftarrow L_1 - 4L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{8} & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

On obtient le système équivalent $\begin{cases} \boxed{8x} + 2t = 4 \\ \boxed{4y} + 2t = 0 \\ \boxed{-8z} + 2t = -4 \end{cases}$ qui donne $z = \frac{t}{4} + \frac{1}{2}$, $y = -\frac{t}{2}$ et $x = \frac{1}{2} - \frac{t}{4}$. D'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Problème 1 (Niveau 3 =15 points)

1) a) $A^2 - 3A = -2I$

donc $A\left(\frac{A - 3I}{-2}\right) = I \Rightarrow A$ inv et

$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I)$

b) calcul à faire

2) a) i) $\rightarrow A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^n(A^2 - 2A) = A^n(A - 2I) = A^{n+1} - 2A^n$

$\rightarrow$ par recurrence

$A^{n+1} = 2A^n + A - 2I$

$\Rightarrow A^{n+2} = 2A^{n+1} + A^2 - 2A = 2A^{n+1} + A - 2I$

$\rightarrow B_{n+2} = A^{n+2} + A - 2I = 2A^{n+1} + A - 2I + A - 2I$

$= 2B_{n+1}$

ii) Selon i) $B_n = 2^n B_0$ (car geom) $B_0 = A - I$

$A^n = B_n - A + 2I = 2^n(A - I) - A + 2I$

$\boxed{A^n = (2^n + 1)A + (2 - 2^n)I}$

b) i) $C^2 = (A-I)^2 = A^2 - 2A + I = A - I = C$

donc $\boxed{\begin{array}{ll} C^n = C & \forall n \geq 1 \\ C^0 = I & \end{array}}$

$$D^2 = (2I - A)^2 = 4I - 4A + A^2$$
$$= 2I - A$$
$$= D$$

donc $\boxed{\begin{array}{ll} D^n = C & \forall n \geq 1 \\ D^0 = I & \end{array}}$

ii) $A = 2C + D$ et $CD = DC = -A^2 + 3A - 2I = 0$

donc $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k C^k D^{n-k}$

$C^k D^{n-k} = CD = 0$ sauf si $k=0$ ou $n-k=0$

$$= \binom{n}{0} 2^0 C^0 D^n + \binom{n}{n} 2^n C^n D^0$$
$$= D + 2^n C$$
$$= (2I - A) + 2^n (A - I)$$

$$\boxed{A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n) I}$$

c) par récurrence $A^0 = I \Rightarrow \alpha_0 = 1,\ \beta_0 = 1$
$\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 0$

$A^n = \alpha_n A + \beta_n I \Rightarrow A^{n+1} = \alpha_n A^2 + \beta_n A$
$$= \alpha_n (3A - 2I) + \beta_n A$$
$$= (3\alpha_n + \beta_n) A - 2\alpha_n I$$
$$= \alpha_{n+1} A + \beta_{n+1} I$$

ainsi $\begin{cases} \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = -2\alpha_n \end{cases}$ ie $\beta_n = -2\alpha_{n-1}$

donc $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n - 2\alpha_{n-1}$

cad $\boxed{\alpha_{n+1} - 3\alpha_n + 2\alpha_{n-1} = 0}$

l'eq caract est $r^2 - 3r + 2 = 0$

sol $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$

$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_n = \lambda + \mu 2^n \\ \beta_n = -2\alpha_{n-1} \end{array}}$ λ et μ avec les CI

d) i) $P^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

$$\Delta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ii) $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$A^n = (P\Delta P^{-1})^n = P\Delta^n P^{-1}$$

e) oui, car A inversible

3) a) déjà vu en Td, dL, DS, ...

Mq $I_3 \in C(M)$

$\begin{cases} N, P \in C(M) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} N + \lambda P \in C(M) \\ NP \in C(M) \end{matrix}$

b) $N \in C(M) \Rightarrow NM = MN$

$\Rightarrow N^{-1}NMN^{-1} = N^{-1}MNN^{-1}$

$\Rightarrow MN^{-1} = N^{-1}M$

$\Rightarrow N^{-1} \in C(M)$

c) $A \in C(\Delta) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ (calcul à faire)

d) $N \in C(M) \Leftrightarrow NM = MN$

$\Leftrightarrow (Q^{-1}NQ)(Q^{-1}MQ) = (Q^{-1}MQ)(Q^{-1}NQ)$

$\Leftrightarrow Q^{-1}NQ \in C(Q^{-1}MQ)$

e) $N \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}NP \in C(P^{-1}AP) = C(\Delta)$

$\Leftrightarrow P^{-1}NP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow P^{-1}NP = a E_{11} + b E_{22} + d E_{32} + c E_{23} + e E_{33}$

$\Leftrightarrow N = a J_1 + \quad \cdots \quad + e J_5$

$J_1 = P E_{11} P^{-1}$

Problème 2 (Niveau 4 =10 points)

Partie I

1.a En développant selon la dernière colonne : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \Delta_k$ avec Δ_k le mineur d'indice $(n+1-k,n+1)$ du déterminant définissant $f(x)$.
De part sa description, Δ_k est un constante indépendante de x. Par suite f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.
Le coefficient de x^n dans $f(x)$ est $(-1)^n\Delta_n$ avec $\Delta_n = V_{n-1}$. Ainsi $\lambda=(-1)^n V_{n-1}$.

1.b Les $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ annulent f car pour $x=a_i$ avec $i\in\{0,1,...,n-1\}$, le déterminant exprimant $f(x)$ possède deux colonnes identiques. Par suite les $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ sont racines de f.

1.c Comme $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ sont des racines deux à deux distinctes de f, on peut écrire $f(x)=g(x)\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)$ avec g une fonction polynomiale.
Or $\deg f\leq n$ donc g est une fonction polynomiale constante (éventuellement nulle).
Puisque le coefficient de x^n dans f est λ, on a $f(x)=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)$.

1.d Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$: $V_1=|1|=1$ et $\prod_{0\leq i<j\leq 1}(a_i-a_j)=1$ (car il n'y a pas de termes dans ce produit).
Supposons la propriété établie au rang $n-1\geq 1$.
Au rang n, en reprenant les notations ci-dessus :

$$V_n=f(a_n)=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(a_n-a_k)=(-1)^n V_{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(a_n-a_k)\underset{HR}{=}\prod_{0\leq i<j\leq n-1}(a_i-a_j)\prod_{k=0}^{n-1}(a_k-a_n)=\prod_{0\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)$$

Récurrence établie.

2.a $P_k=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a_k^{n-i}X^i$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{C}=\begin{pmatrix} C_n^0a_0^n & C_n^0a_1^n & C_n^0a_2^n & \cdots & C_n^0a_n^n \\ C_n^1a_0^{n-1} & C_n^1a_1^{n-1} & C_n^1a_2^{n-1} & \cdots & C_n^1a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^{n-1}a_0 & C_n^{n-1}a_1 & C_n^{n-1}a_2 & \cdots & C_n^{n-1}a_n \\ C_n^n & C_n^n & C_n^n & \cdots & C_n^n \end{pmatrix}$ avec $C_n^k=\binom{n}{k}$

2.b $\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C}=\begin{vmatrix} C_n^0a_0^n & C_n^0a_1^n & C_n^0a_2^n & \cdots & C_n^0a_n^n \\ C_n^1a_0^{n-1} & C_n^1a_1^{n-1} & C_n^1a_2^{n-1} & \cdots & C_n^1a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^{n-1}a_0 & C_n^{n-1}a_1 & C_n^{n-1}a_2 & \cdots & C_n^{n-1}a_n \\ C_n^n & C_n^n & C_n^n & \cdots & C_n^n \end{vmatrix}$ donne

$$\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C}=\left(\prod_{k=0}^{n}C_n^k\right)\begin{vmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\left(\prod_{k=0}^{n}C_n^k\right)\prod_{0\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)\neq 0$$

Donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on a $T_h(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+h)^k \in \mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi $T_h : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$. De plus, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
$T_h(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+h) = \lambda.P(X+h) + \mu.Q(X+h) = \lambda.T_h(P) + \mu.T_h(Q)$.
Finalement T_h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T_h) = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 & \cdots & C_n^n h^n \\ 0 & 1 & 2h & \cdots & C_n^{n-1} h^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & & C_n^{n-2} h^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_n^0 \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbb{R})$ donc $\det T_h = 1$.

2. $E \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
$\forall h \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Id} \circ T_h = T_h \circ \mathrm{Id}$ donc $\mathrm{Id} \in E$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi, \psi \in E$.
$\forall h \in \mathbb{R}$, $(\lambda\varphi + \mu\psi) \circ T_h = \lambda(\varphi \circ T_h) + \mu(\psi \circ T_h) = \lambda(T_h \circ \varphi) + \mu(T_h \circ \psi) = T_h \circ (\lambda\varphi + \mu\psi)$
et $(\varphi \circ \psi) \circ T_h = \varphi \circ T_h \circ \psi = T_h \circ (\varphi \circ \psi)$ donc $\lambda\varphi + \mu\psi \in E$ et $\varphi \circ \psi \in E$.
Ainsi E est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$:
D'une part $T_h(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+h)^k$ et $D(T_h(P)) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (X+h)^{k-1}$,
d'autre part $D(P) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ et $T_h(D(P)) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (X+h)^{k-1}$,
donc $T_h \circ D = D \circ T_h$. Ainsi $D \in E$.

3.b Puisque $D \in E$ et que E est un sous-anneau : $\forall k \in \mathbb{N}, D^k \in E$.

3.c Supposons $\lambda_0.\mathrm{Id} + \lambda_1 D + \lambda_2 D^2 + \ldots + \lambda_n D^n = 0$.
i.e. $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda_0.P + \lambda_1 P' + \lambda_2 P'' + \ldots + \lambda_n P^{(n)} = 0$.
Pour $P = X^n$: $\lambda_0 X^n + n\lambda_1 X^{n-1} + n(n-1)\lambda_2 X^{n-2} + \ldots + n!\lambda_n = 0$.
Par identification des coefficients de deux polynômes égaux : $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

4.a Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi, \psi \in E$:
$\theta(\lambda\varphi + \mu\psi) = (\lambda\varphi + \mu\psi)(X^n) = \lambda\varphi(X^n) + \mu\psi(X^n) = \lambda\theta(\varphi) + \mu\theta(\psi)$.
Donc θ est un application linéaire.

4.b Soit $\varphi \in \ker\theta$. On a $\varphi(X^n) = 0$.
Or $\varphi \in E$ donc $\forall h \in \mathbb{R}$, $\varphi((X+h)^n) = \varphi(T_h(X^n)) = T_h(\varphi(X^n)) = T_h(0) = 0$.
Considérons $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
On a vu que $((X+a_k)^n)_{0 \le k \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et part la relation ci-dessus
$\forall 0 \le k \le n, \varphi((X+a_k)^n) = 0$ donc $\varphi = 0$.
Ainsi $\ker\theta = \{0\}$. θ est injective.

4.c L'injectivité de φ implique : $\dim E \le \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.
La liberté de la famille $(D^k)_{0 \le k \le n}$ implique $\dim E \ge n+1$.
Ainsi $\dim E = n+1$.

5. $(D^k)_{0 \le k \le n}$ est une famille libre formée de $n+1 = \dim E$ éléments de E, c'est donc une base de E.

Problème 3 (Niveau 5 =10 points)

Partie I – Endomorphisme antisymétrique

1) Soit $(X,Y) \in E^2$; je développe, par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle u(X+Y), X+Y\rangle = \langle u(X), X\rangle + \langle u(X), Y\rangle + \langle u(Y), X\rangle + \langle u(Y), Y\rangle$$

d'où, en appliquant l'hypothèse à $X+Y$, X et Y : $0 = \langle u(X), Y\rangle + \langle u(Y), X\rangle$. Ainsi :

$$\boxed{\forall (X,Y) \in E \times E \quad \langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle.}$$

2) a) Soit λ valeur propre réelle de u et X un vecteur propre associé ; j'ai d'une part $\langle u(X), X\rangle = 0$ et d'autre part $\langle u(X), X\rangle = \lambda \|X\|^2$. Comme X est non nul par construction, j'en déduis que $\lambda = 0$:

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre réelle possible de } u.}$$

b) Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, le polynôme caractéristique de u est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3, qui s'annule donc au moins une fois sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Par conséquent :

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } u \text{ a au moins une racine réelle.}}$$

Les deux derniers résultats montrent que le spectre de u est $\{0\}$. Donc $\operatorname{Ker} u$ est de dimension au moins égale à 1 ; ainsi, puisque u est non nul par hypothèse :

$$\boxed{\operatorname{Ker} u \text{ est de dimension 1 ou 2.}}$$

3) Déjà, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = 3$. Je montre en outre que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont orthogonaux : soient $X \in \operatorname{Ker} u$ et $Z = u(Y) \in \operatorname{Im} u$; j'ai

$$\langle X, Z\rangle = \langle X, u(Y)\rangle = -\langle u(X), Y\rangle = 0 \quad \text{car} \quad X \in \operatorname{Ker} u.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} u \subset (\operatorname{Im} u)^{\perp}$; d'où, compte tenu des dimensions :

$$\boxed{\operatorname{Ker} u \text{ et } \operatorname{Im} u \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E.}$$

4) a) Avant tout, $\operatorname{Im} u$ étant stable par u et X élément de $\operatorname{Im} u$, $u(X)$ est également élément de $\operatorname{Im} u$. De plus, X étant non nul, si $(X, u(X))$ était une famille liée, X serait vecteur propre de u, donc élément de $\operatorname{Ker} u$, puisque 0 est la seule valeur propre de u ; ceci est absurde car $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ d'après la question précédente. En conclusion,

$$\boxed{(X, u(X)) \text{ est une famille libre de } \operatorname{Im} u.}$$

b) u étant non nul, $\operatorname{Im} u$ contient des vecteurs non nuls, donc, d'après la question précédente, $\operatorname{Im} u$ contient des familles libres de deux vecteurs, d'où $\dim \operatorname{Im} u \geq 2$; or j'ai déjà vu que $\dim \operatorname{Ker} u \geq 1$, par conséquent, puisqu'ils sont supplémentaires :

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} u = 2 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker} u = 1.}$$

5) Soit (e_1, e_2) une base orthonormale de $\operatorname{Im} u$ et e_3 un vecteur unitaire de $\operatorname{Ker} u$. D'après les questions précédentes, (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de E. Par définition, $u(e_1)$ est dans $\operatorname{Im} u$, donc

$$u(e_1) = \langle u(e_1), e_1\rangle \cdot e_1 + \langle u(e_1), e_2\rangle \cdot e_2 = \alpha e_2$$

où j'ai posé $\alpha = \langle u(e_1), e_2\rangle$; de même, en utilisant **1)**,

$$u(e_2) = \langle u(e_2), e_1\rangle \cdot e_1 + \langle u(e_2), e_2\rangle \cdot e_2 = -\alpha e_1$$

Cela me donne les deux premières colonnes de la matrice de u dans (e_1, e_2, e_3), et $e_3 \in \operatorname{Ker} u$, donc la troisième colonne est nulle :

$$\boxed{\text{La matrice de } u \text{ dans la base orthonormale } (e_1, e_2, e_3) \text{ est } B.}$$

6) a) Grâce au résultat précédent, j'obtiens :

$$u^2(e_1) = -\alpha^2 e_1 \ ; \ u^2(e_2) = -\alpha^2 e_2 \ ; \ u^2(e_3) = 0.$$

La matrice de u^2 dans (e_1, e_2, e_3) est donc $-\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\boxed{u^2 = -\alpha^2 p \text{ où } p \text{ est la projection orthogonale sur } \operatorname{Vect}(e_1, e_2) = \operatorname{Im} u.}$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}$; d'après **a)** : $u^{2m} = \left(u^2\right)^m = (-1)^m \alpha^{2m} p^{2m}$; or, comme $p^2 = p$, il vient par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p^n = p \quad (\text{tandis que } p^0 = \mathrm{I}_E \ \ldots).$$

D'où

$$u^{2m} = (-1)^m \alpha^{2m} p \quad \text{et} \quad u^{2m+1} = u^{2m} \circ u = (-1)^m \alpha^{2m} u \ ;$$

en effet $p \circ u = u$ puisque les vecteurs de $\operatorname{Im} u$ sont invariants par p. En conclusion :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \quad u^{2m} = (-1)^m \alpha^{2m} p \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad u^{2m+1} = (-1)^m \alpha^{2m} u.}$$

7) a) D'après le résultat précédent, j'obtiens immédiatement :

$$\boxed{\begin{gathered} \sum_{k=0}^{N} \frac{u^k}{k!} = \mathrm{I}_E + C_N(\alpha)\, p + S_N(\alpha)\, u \quad \text{où} \\ C_N(\alpha) = \sum_{m=1}^{E(N/2)} (-1)^m \frac{\alpha^{2m}}{(2m)!} \quad \text{et} \quad S_N(\alpha) = \sum_{m=0}^{E((N-1)/2)} (-1)^m \frac{\alpha^{2m}}{(2m+1)!} \end{gathered}}$$

b) Je reconnais — à quelques détails près — les développements en série entière des fonctions cos et sin. Précisément, sachant que α est non nul (sinon u serait nul) :

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} C_N(\alpha) = \cos\alpha - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{N \to +\infty} S_N(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}.}$$

c) $\mathrm{I}_E + C(\alpha)\, p + S(\alpha)\, u$ a pour matrice dans (e_1, e_2, e_3) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (\cos\alpha - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Je reconnais une matrice de rotation :

$$\boxed{\exp(u) \text{ est la rotation d'axe orienté par } e_3 \text{ et d'angle } \alpha.}$$