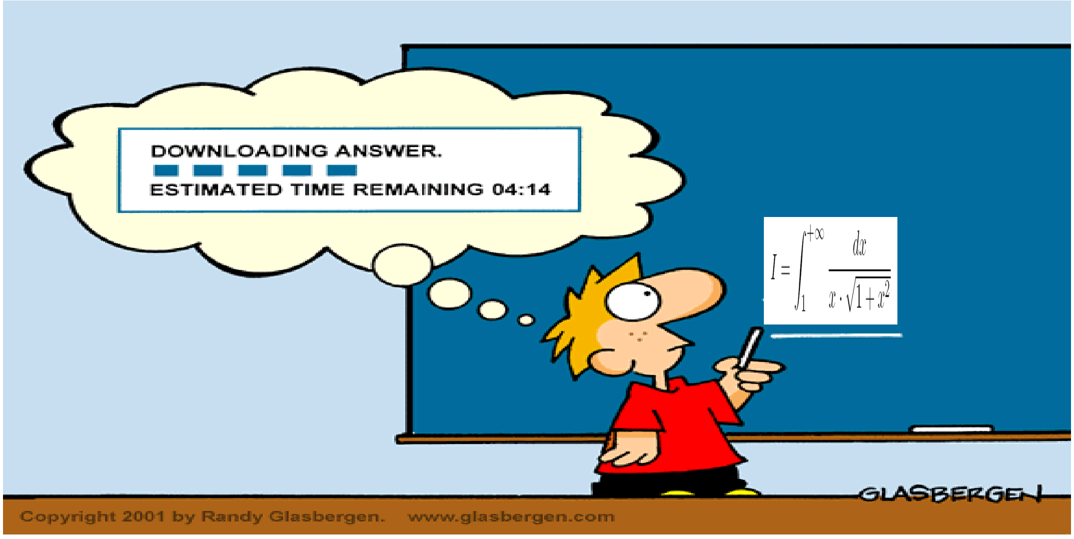
Lundi 5 Juin 2017

Intégration sur un segment

© TROESCH, Louis le Grand



Le but de ce problème est de calculer des intégrales du type $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^k)^n}$, *pour* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *En particulier, la méthode exposée ci-dessous justifie qu'on sait calculer toutes les intégrales* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$, *et plus généralement par la même technique avec des bornes différentes : ce fait est une des étapes importantes dans la méthode systématique de primitivation des fractions rationnelles* via *les décompositions en éléments simples (voir un chapitre ultérieur).*

Question préliminaire – Justifier que $I_{n,k}$ est bien définie pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Partie I – Calcul de certaines valeurs particulières.

1. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $I_{0,k}$.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $I_{n,1}$.
3. Calculer $I_{1,2}$.
4. Calcul de $I_{1,3}$
   (a) Déterminer des réels a ,b et c tels que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait :
   $$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2}.$$
   (b) En déduire que $I_{1,3} = \dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Partie II – Une relation de récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^k}{(1+x^k)^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir une relation entre $I_{n,k}$, $J_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,
$$J_{n,k} = -\frac{1}{k(n-1)2^{n-1}} + \frac{1}{k(n-1)} I_{n-1,k}.$$
3. En déduire une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$, et justifier que cette relation permet de calculer de proche en proche tous les termes $I_{n,k}$, en fonction de $I_{1,k}$.
4. Déterminer $I_{3,2}$.

Partie III – Fonctions définies par une intégrale.

Soit n un entier positif ou nul. On pose f la fonction de deux variables définie par
$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2},$$
et $F_n : y \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x,y)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^n}$.
Pour simplifier les notations, on note, lorsque x est un réel fixé de $[0,1]$, $f_x(y) = f(x,y)^n$. Ainsi, on a :
$$\forall (x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_x'(y) = \frac{\partial (f^n)}{\partial y}(x,y).$$

1. Justifier que F_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On suppose que $y > 0$. Soit h un réel non nul tel que $|h| < \frac{y}{2}$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit M un majorant de $|f_x''|$ sur $[y, y+h]$ (ou $[y+h, y]$ si $h < 0$). Justifier que :
   $$\left| \frac{f_x(y+h) - f_x(y)}{h} - f_x'(y) \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \cdot M.$$
   (b) Montrer que pour tout z entre y et $y+h$, on a $|f_x''(z)| \leqslant \dfrac{2n(x^2+4(2n+3)y^2)}{(x^2+\frac{y^2}{4})^{n+2}}$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{2n(x^2+4(2n+3)y^2)}{(x^2+\frac{y^2}{4})^{n+2}}\,\mathrm{d}x$ est bien définie.
   (d) En déduire que F_n est dérivable en y et que
   $$F_n'(y) = -2ny \int_0^1 \frac{1}{(x^2+y^2)^{n+1}} = -2nyF_{n+1}(y)$$
3. Calculer, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $F_1(y)$, $F_2(y)$ et $F_3(y)$, et retrouver l'expression de $I_{3,2}$.

FIN

Question préliminaire –

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^k)^n}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable. Ainsi, $\boxed{I_{n,k} \text{ est bien définie pour tout } k \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}.}$

Partie I – Calcul de certaines valeurs particulières.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$I_{0,k} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^k)^0}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = \boxed{1 = I_{0,k}}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est différent de 0 et 1, on a :
$$I_{n,1} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{(1-n)(1+x)^{n-1}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = I_{n,1}}.$$
Si $n=0$, on a directement $\boxed{I_{0,1}=1}$ d'après la question précédente, et si $n=1$ on obtient :
$$I_{1,1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\ln 2 = I_{1,1}}.$$
3. On a :
$$I_{1,2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\operatorname{Arctan} x\Big]_0^1 = \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 = \boxed{\frac{\pi}{4} = I_{1,2}}$$
4. Calcul de $I_{1,3}$
   (a) Soit (a,b,c) des réels. Alors, pour tout x de $[0,1]$, on a :
$$\frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2} = \frac{a(1-x+x^2)+(bx+c)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)}{x^3+1}.$$
   Ainsi, pour que l'égalité de l'énoncé soit réalisée, il suffit que (a,b,c) vérifient :
$$\begin{cases} a+b & = 0 \\ -a+b+c & = 0 \\ a+c & = 1 \end{cases}$$
   Ainsi, les valeurs suivantes conviennent : $\boxed{a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3},\ c=\frac{2}{3}.}$ On peut aussi retrouver ces valeurs par les techniques usuelles (on part de la forme supposée de la DES, on multiplie par $1+x$ on évalue en -1 : cela donne a ; on reprend l'égalité initiale, on multiplie par x on prend la limite en $+\infty$, on obtient b ; on renprend l'égalité initiale, on évalue en 0, cela fournit c).

   (b) Nous avons montré que pour tout x de $[0,1]$
$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1},$$
   donc
$$I_{1,3} = \frac{1}{3}I_{1,1} - \frac{1}{3}I + \frac{1}{2}J$$
   où :
   - $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-\frac{1}{2}}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\ln(1-x+x^2)\Big]_0^1 = 0$
   - $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x+x^2}$.
   Pour calculer J, on effectue une mise sous forme canonique du trinôme :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad (x^2-x+1) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right).$$
   On effectue alors le changement de varible $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, affine donc valide, et amenant $\mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$. Ainsi :
$$J = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\operatorname{Arctan} y\Big]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

On en déduit que : $\boxed{I_{1,3} = \dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} = I_{1,3}}$.

Partie II – Une relation de récurrence.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n,k} + J_{n,k} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^k)^n}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^k}{(1+x^k)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x^k}{(1+x^k)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^k)^{n-1}}\,\mathrm{d}x,$$

donc $\boxed{I_{n,k} + J_{n,k} = I_{n-1,k}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. On effectue une intégration par parties sur $J_{n,k}$, en posant u et v les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, définies par :

$$\forall x \in [0,1] u(x) = x, \qquad u'(x) = 1, \qquad v(x) = \frac{1}{k(1-n)(1+x^k)^{n-1}} \qquad v'(x) = \frac{x^{k-1}}{(1+x^k)^n},$$

(valable car $n \geqslant 2$). Ainsi, on obtient :

$$J_{n,k} = \left[\frac{x}{k(1-n)(1+x^k)^{n-1}}\right]_0^1 + \frac{1}{k(n-1)} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^k)^{n-1}},$$

et on obtient bien $\boxed{J_{n,k} = -\dfrac{1}{k(n-1)2^{n-1}} + \dfrac{1}{k(n-1)} I_{n-1,k}}$.

3. Soit $n \geqslant 2$, alors, d'après les deux questions précédentes :

$$I_{n,k} = I_{n-1,k} - J_{n,k} = I_{n-1,k} + \frac{1}{k(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{k(n-1)} I_{n-1,k}.$$

Ainsi, on obtient la relation suivante, pour tout $k \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 2$:

$$\boxed{I_{n,k} = \left(1 - \frac{1}{k(n-1)}\right) I_{n-1,k} + \frac{1}{k(n-1)2^{n-1}}.}$$

De manière évidente, cette relation permet de calculer les valeurs de $I_{n,k}$ de proche en proche, en augmentant l'indice n de 1 à chaque étape. En partant de $I_{1,k}$, on obtient donc toutes les valeurs $I_{n,k}$, pour $n \geqslant 1$.

4.
   - $I_{2,2} = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) I_{1,2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$
   - $I_{3,2} = \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) I_{2,2} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{3\pi}{32} + \dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{16} = \boxed{\dfrac{3\pi}{32} + \dfrac{1}{4} = I_{3,2}}$

Partie III – Fonctions définies par une intégrale.

1. Pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto f_2(x,y)^n$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $F_n(y)$ est bien définie. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } F_n \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.
2. On suppose que $y > 0$. Soit h un réel non nul tel que $|h| < \frac{y}{2}$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit M un majorant de f_x'' sur $[y, y+h]$ (ou $[y+h, y]$ si $h < 0$).
   D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction f_x entre y et $y+h$, f_x étant de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à y, pour tout x fixé dans $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$|f_x(y+h) - f_x(y) - hf_x'(y)| \leqslant \frac{|h|^2}{2!} \cdot M.$$

En divisant par $|h| > 0$, il vient :

$$\boxed{\left|\frac{f_x(y+h) - f_x(y)}{h} - f_x'(y)\right| \leqslant \frac{|h|}{2} \cdot M}$$

(b) On commence par le calcul de la dérivée et de la dérivée seconde de f_x, de classe $\mathcal{C}^2$ à x fixé :

$$\forall z \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_x'(z) = \frac{-2nz}{(x^2+z^2)^{n+1}},$$

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_x''(z) &= \frac{-2n(x^2+z^2)^{n+1} + 4n(n+1)z^2(x^2+z^2)^n}{(x^2+z^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{-2nx^2 - 2nz^2 + 4n(n+1)z^2}{(x^2+z^2)^{n+2}} = \frac{-2n(x^2+(2n+1)z^2)}{(x^2+z^2)^{n+2}}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $z \in [y, y+h]$ (ou $[y+h, y]$), on a

$$\frac{y}{2} \leqslant y - |h| \leqslant z \leqslant y + |h| \leqslant \frac{3y}{2} \leqslant 2y,$$

puisque $|h| < \frac{y}{2}$. Ainsi, pour tout $z \in [y, y+h]$ (ou $[y+h, y]$), on a, d'après l'inégalité triangulaire et cet encadrement :

$$\begin{aligned}|f_x''(z)| \leqslant \frac{2n(x^2+(2n+1)z^2)}{(x^2+z^2)^{n+2}} &\leqslant \frac{2n\left(x^2+(2n+1)\,(2y)^2\right)}{\left(x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)^{n+2}}. \\ &= \frac{2n\left(x^2+4(2n+1)y^2\right)}{\left(x^2+\frac{y^2}{4}\right)^{n+2}} \leqslant \frac{2n\left(x^2+4(2n+3)y^2\right)}{\left(x^2+\frac{y^2}{4}\right)^{n+2}}\end{aligned}$$

Vous remarquerez que cette inégalité est loin d'être optimale, puisqu'on peut facilement trouver mieux, en utilisant la majoration $z \leqslant \frac{3y}{2}$ au lieu de $z \leqslant 2y$, et en n'effetuant pas la dernière majoration inutile de $2n+1$ par $2n+3$. La raison d'être de ce $2n+3$ est à mon avis, dans l'esprit du concepteur, une utilisation plus précoce de l'inégalité triangulaire, avant regroupement des termes en z^2 dans le calcul de f_z''. Toujours est-il que nous obtenons bien, pour tout z compris entre y et $y+h$:

$$\boxed{|f_x''(z)| \leqslant \frac{2n\left(x^2+4(2n+3)y^2\right)}{\left(x^2+\frac{y^2}{4}\right)^{n+2}}}.$$

(c) À y fixé strictement positif, la fonction $x \mapsto \dfrac{2n\left(x^2+4(2n+3)y^2\right)}{\left(x^2+\frac{y^2}{4}\right)^{n+2}}$ est continue sur $[0,1]$, en tant que quotient de fonctions polynomiales, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[0,1]$ (car strictement positif). Ainsi, pour tout $y > 0$ fixé, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 \frac{2n(x^2+4(2n+3)y^2)}{(x^2+\frac{y^2}{4})^{n+2}}\,\mathrm{d}x \text{ est bien définie}}$.

(d) Le majorant obtenu dans le question précédente ne dépend que de x et y, qui étaient fixés dans la question 5(b)i. Ainsi, on peut prendre cette expression pour M (qui ne doit pas dépendre de z, mais peut tout à fait dépendre des autres variables fixées). Ainsi, pour tout $y > 0$, pour tout h non nul tel que $|h| \leqslant \frac{y}{2}$, et pour tout y compris entre y et $y+h$, on a :

$$\forall x \in RR_+, \quad \left|\frac{f_x(y+h)-f_x(y)}{h} - f_x'(y)\right| \leqslant \frac{|h|}{2} \cdot \frac{2n\left(x^2+4(2n+3)y^2\right)}{\left(x^2+\frac{y^2}{4}\right)^{n+2}}.$$

L'intégrale sur x entre 0 et 1 du terme de droite existant d'après la question précédente, et de même pour le terme de gauche (par continuité), on déduit de l'inégalité triangulaire et de la propriété de croissance de l'intégrale, que :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \left(\frac{f_x(y+h)-f_x(y)}{h} - f_x'(y)\right)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{f_x(y+h)-f_x(y)}{h} - f_x'(y)\right| \\ &\leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 \frac{2n\left(x^2+4(2n+3)y^2\right)}{\left(x^2+\frac{y^2}{4}\right)^{n+2}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'intégrale du terme de droite ne dépendant pas de h, et $\frac{|h|}{2}$ tendant vers 0 lorsque h tend vers 0, on en déduit que

$$0 = \lim_{h\to 0} \int_0^1 \left(\frac{f_x(y+h) - f_x(y)}{h} - f_x'(y) \right) \, \mathrm{d}x = \lim_{h\to 0} \left(\frac{F_n(y+h) - F_n(y)}{h} - \int_0^1 f_x'(y) \, \mathrm{d}x \right).$$

Cette dernière intégrale étant indépendante de h, il vient donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_n(y+h) - F_n(y)}{h} = \int_0^1 f_x'(y) \, \mathrm{d}x.$$

Ainsi, F_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad F_n'(y) = \int_0^1 \frac{-2ny}{(x^2+y^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}x, \qquad \text{soit:} \quad \boxed{F_n'(y) = -2nyF_{n+1}(y)}.$$

3. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$F_1(y) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{y} = \left[\frac{1}{y} \operatorname{Arctan} \frac{x}{y} \right]_0^1.$$

Ainsi,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \boxed{F_1(y) = \frac{1}{y} \operatorname{Arctan} \frac{1}{y}}.$$

Il vient alors :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad F_2(y) = \frac{F_1'(y)}{-2y} = -\frac{1}{2y} \left(-\frac{1}{y^2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}} \right).$$

Ainsi,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \boxed{F_2(y) = \frac{1}{2y^3} \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2(y^2+1)}}.$$

Une nouvelle dérivation amène

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad F_2'(y) = -\frac{3}{2y^4} \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} - \frac{3+5y^2}{2y^3(1+y^2)^2},$$

donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \boxed{F_3(y) = -\frac{F_2'(y)}{2 \cdot 2y} = \frac{3}{8y^5} \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} + \frac{3+5y^2}{8y^4(1+y^2)^2}}.$$

On retrouver alors : $\boxed{I_{3,2} = F_3(1) = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.}$