Mercredi 14 Juin 2017

Intégration

Formules de Stirling

L'objectif de ce problème est de déterminer un équivalent simple à $n!$ quand $n \to +\infty$.

Partie I – Une limite

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$

1.a Calculer I_0, I_1 et I_2.

1.b Montrer que la suite (I_n) est décroissante et strictement positive.

1.c A l'aide d'un changement de variable adéquate, établir : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$.

2.a Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

2.b En encadrant $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$, montrer que $I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n$.

2.c Observer que la suite de terme général $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constante.

2.d En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \to +\infty$.

3.a Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de nombres factoriels.

3.b En observant que $\dfrac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$ obtenir $\pi = \lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{p((2p)!)^2}$.

Partie II – En encadrement

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ concave. On note $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} \left| f''(t) \right|$.

On introduit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction affine déterminée par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

1.a Exprimer, pour tout $t \in [a,b]$, $g(t)$ en fonction de a, b et f.

1.b Calculer $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

2. Justifier par un argument géométrique, que $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

3. On désire maintenant établir la propriété : $\forall t \in [a,b], f(t)-g(t) \le M\dfrac{(t-a)(b-t)}{2}$

Celle-ci est clairement vérifiée pour $t=a$ ou $t=b$. Il reste à l'étudier pour $t \in]a,b[$.

Pour cela, on introduit $h:[a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $h(x)=f(x)-g(x)-K(x-a)(x-b)$ où la constante K est choisie de sorte que $h(t)=0$.

3.a Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer $h''(x)$.

3.b En exploitant le théorème de Rolle, établir qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $h''(c)=0$.

3.c En déduire qu'alors $|K| \le \dfrac{M}{2}$ puis l'inégalité voulue.

4. Etablir alors que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \le \frac{M(b-a)^3}{12}$.

5. En appliquant le résultat précédent à la fonction $f: x \mapsto \ln x$ sur $[n,n+1]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) établir :

$$0 \le \left(n+\frac{1}{2}\right)\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)-1 \le \frac{1}{12n^2}.$$

Partie III – Formule de Stirling

Cette partie exploite les résultats des questions I.3.b et II.5 qui pourront, au besoin, être admis.

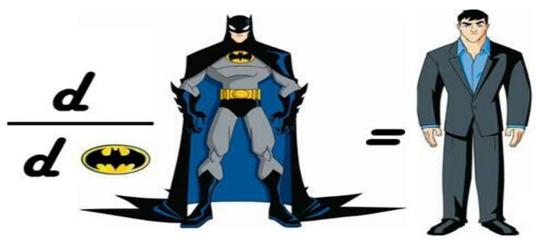
On pose pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$: $u_n = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\right) - \ln n!$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$.

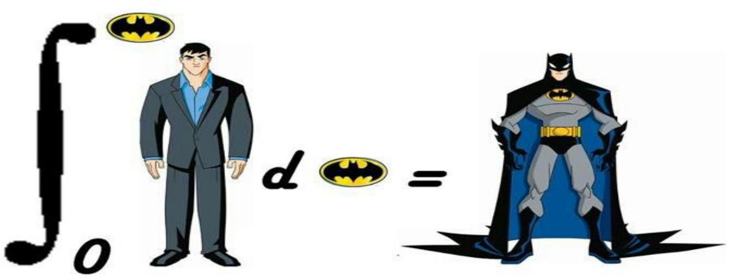
1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

   On note C leur limite commune

2. En calculant de deux manières $\lim\limits_{n\to\infty} 2u_n - u_{2n}$ montrer que $C = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

3. Conclure : $n! \sim \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$.





Correction

Partie I

1.a $I_0=\int_0^{\pi/2}1\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$, $I_1=\int_0^{\pi/2}\sin t\mathrm{d}t=\left[-\cos t\right]_0^{\pi/2}=1$ et $I_2=\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

1.b $\forall t\in[0,\pi/2],\sin^n t\geq 0$ et $t\mapsto\sin^n t$ n'est pas la fonction nulle donc $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t>0$.

$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,(\sin t-1)\mathrm{d}t\leq 0$ car $t\mapsto\sin^n t\,(\sin t-1)$ est négative sur $[0,\pi/2]$.

Ainsi (I_n) est une suite décroissante et strictement positive.

1.c En réalisant le changement de variable $u=\pi/2-t$:

$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_{\pi/2}^{0}\sin^n(\pi/2-u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^{\pi/2}\cos^n u\mathrm{d}u=J_n$.

2.a $I_{n+2}=\int_0^{\pi/2}\sin^{n+2} t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sin t\sin^{n+1} t\mathrm{d}t\underset{\text{ipp}}{=}\left[-\cos t\sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(n+1)\cos^2 t\sin^n t\mathrm{d}t$

donne $I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\sin^n t\mathrm{d}t=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$

donc $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$.

2.b $I_{n+1}\leq I_n$ donc $\frac{I_{n+1}}{I_n}\leq 1$.

D'autre part : $\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}\geq\frac{n+1}{n+2}$ car $\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}\geq 1$.

Ainsi $\frac{n+1}{n+2}\leq\frac{I_{n+1}}{I_n}\leq 1$ et en vertu du théorème des gendarmes : $\frac{I_{n+1}}{I_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

2.c $(n+2)I_{n+1}I_{n+2}=(n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n=(n+1)I_nI_{n+1}$. La suite de terme général nI_nI_{n+1} est constante.

2.d La valeur de cette constante s'obtient en prenant $n=0$ et on obtient : $I_0I_1=\pi/2$.

Puisque $I_n\sim I_{n+1}$ et $\pi/2=(n+1)I_nI_{n+1}\sim nI_n^2$ donc $I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3.a $I_{2p}=\frac{2p-1}{2p}I_{2p-2}=\frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)}I_{2p-4}=\ldots=\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}I_0$

ainsi $I_{2p}=\frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots 2.1}{\left[(2p)(2p-2)\cdots 2\right]^2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2p)!}{\left[2^p p(p-1)\cdots 1\right]^2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}\pi$

Par la même démarche : $I_{2p+1}=\frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}I_1=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

3.b $I_n\sim I_{n+1}$ donc $\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}}\sim\frac{2p}{2p}\frac{I_{2p}}{I_{2p}}=1$.

$$\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}}=\frac{(2p+1)}{2p}\frac{\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}{\frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}\pi}=\frac{2^{4p}(p!)^4}{p((2p)!)^2}\frac{1}{\pi}\text{ donc }\pi=\lim_{p\to+\infty}\frac{2^{4p}(p!)^4}{p((2p)!)^2}.$$

Partie II

1.a $g(t)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$.

1.b $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (t-a)\mathrm{d}t + \int_a^b f(a)\mathrm{d}t = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$.

2. Puisque f est concave, les cordes sont en dessous les arcs.

Par suite $\forall t\in[a,b], g(t)\le f(t)$ et donc, en intégrant : $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

3.a Par opérations h est $\mathcal{C}^2$.
Puisque g est affine $g''(x)=0$. D'autre part $((x-a)(x-b))''=2$ donc $h''(x)=f''(x)-2K$.

3.b La fonction h est $\mathcal{C}^2$ et s'annule en $a<t<b$.
En appliquant le théorème de Rolle à h sur les segments $[a,t]$ et $[t,b]$, h' s'annule en des points α,β tels que $a<\alpha<t<\beta<b$. En appliquant le théorème de Rolle à h' sur $[\alpha,\beta]$ on obtient une annulation de h'' en un point $c\in\,]\alpha,\beta[\,\subset[a,b]$.

3.c $h''(c)=0$ donne $2K=f''(c)$ puis $|2K|\le M=\sup\limits_{[a,b]}|f''|$ et $|K|\le\frac{M}{2}$.
$h(t)=0$ donne $f(t)-g(t)=K(t-a)(t-b)$
donc $|f(t)-g(t)|\le|K||t-a||t-b|\le\frac{M}{2}(t-a)(b-t)$.
De plus $f(t)-g(t)\ge 0$ et donc l'inégalité précédente donne celle voulue.

4. En intégrant l'inégalité précédente sur $[a,b]$:
$$\int_a^b (f(t)-g(t))\mathrm{d}t \le \frac{M}{2}\int_a^b (t-a)(b-t)\mathrm{d}t$$
Or $\int_a^b (t-a)(b-t)\mathrm{d}t \underset{\text{ipp}}{=} \left[\frac{1}{2}(t-a)^2(b-t)\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{6}$

donc $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \le \frac{M(b-a)^3}{12}$.

5. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Puisque $f''(x)\le 0$, f est concave.

D'autre part, puisque $M=\sup\limits_{[n,n+1]}|f''(x)|=\frac{1}{n^2}$.

Avec les notations qui précèdent :
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_n^{n+1}\ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_n^{n+1} = (n+1)\ln n - n\ln n - 1$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln n + \ln(n+1)}{2}$ donc
$$0\le\left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln n+\ln(n+1))-1\le\frac{1}{12n^2}.$$

Partie III

1. $u_{n+1}-u_n=\ln\dfrac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}e^{-(n+1)}}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}-\ln\dfrac{(n+1)!}{n!}=(n+\dfrac{1}{2})(\ln(n+1)-\ln(n))-1\geq 0$ via II.2.b

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n-1)}=\left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1)-\ln(n))-\frac{1}{12n(n-1)}$$
$$\leq\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{12n(n-1)}\leq 0$$

Ainsi (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et puisque $v_n-u_n\to 0$ on peut assurer que ces suites sont adjacentes.

2. D'une part $2u_n-u_{2n}\to 2C-C=C$ et d'autre part :

$$2u_n-u_{2n}=\ln\left(\frac{n^{2n+1}e^{-2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}\right)-\ln\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n\left((2n)!\right)^2}{2^{4n+1}(n!)^4}\right)\to\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2\pi}.$$

Par suite $C=-\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

3. $\ln\dfrac{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}=\ln\sqrt{2\pi}+u_n\to 0$ donc $\dfrac{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}\to 1$ puis $n!\sim\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$.