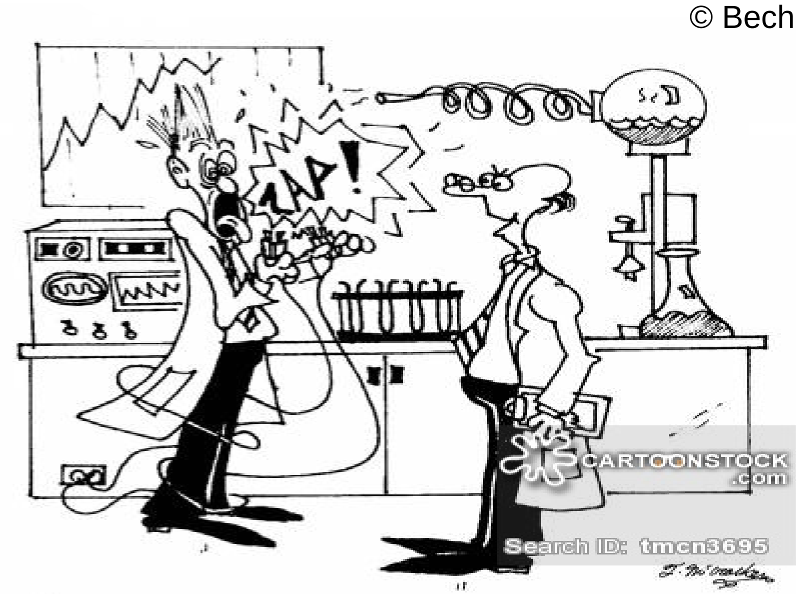
Samedi 19 Juin 2017

Probabilités

Variables Aléatoires Réelles



"THE PROBABILITY OF SOMEONE WATCHING YOU IS PROPORTIONAL TO THE STUPIDITY OF YOUR ACTIONS."

Cet exercice a pour but l'étude d'une marche aléatoire sur les sommets d'un triangle, ce qui fait l'objet de la partie II. Dans la partie I, on aborde des questions préliminaires d'algèbre linéaire.

Partie I.

On associe à tout triplet (x, y, z) de nombres réels la matrice $M(x, y, z)$ définie par : $M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$.

La matrice $M(1, 0, 0)$ n'est autre que la matrice identité I_3 et la matrice $M(0, 1, 0)$ est notée J.

1. L'espace vectoriel E des matrices $M(x, y, z)$.

   (a) Calculer les matrices J^2 et J^3.

   (b) Établir que l'ensemble E des matrices de la forme $M(x, y, z)$ où (x, y, z) décrit $\mathbb{R}^3$ constitue un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.

   (c) Établir que (I_3, J, J^2) forme une base de E.

2. Etude des matrices $M(x, y, y)$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier que P est inversible, calculer P^{-1} et vérifier que $P^{-1}M(x, y, y)P = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y \end{pmatrix}$.

(b) En déduire la relation suivante pour tout nombre entier naturel n :

$$[M(x,y,y)]^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n M(1,1,1) + \frac{1}{3}(x-y)^n M(2,-1,-1).$$

Partie II.
On désigne dans toute cette partie par p un nombre réel tel que $0 < p < 1/2$ et on considère la marche aléatoire d'un point S sur les sommets d'un triangle ABC.
A l'instant initial $t = 0$, le point S est en A, et il se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si S est à l'instant n au sommet A du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet B avec la probabilité p, au sommet C avec la probabilité p, ou encore au sommet A avec la probabilité $1-2p$.
- Si S est à l'instant n au sommet B du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet C avec la probabilité p, au sommet A avec la probabilité p, ou encore au sommet B avec la probabilité $1-2p$.
- Si S est à l'instant n au sommet C du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet A avec la probabilité p, au sommet B avec la probabilité p, ou encore au sommet C avec la probabilité $1-2p$.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne enfin par :

- A_n l'événement "le point S est au sommet A à l'instant n" et par a_n sa probabilité.
- B_n l'événement "le point S est au sommet B à l'instant n" et par b_n sa probabilité.
- C_n l'événement "le point S est au sommet C à l'instant n" et par c_n sa probabilité.

1. Calcul des probabilités a_n, b_n, c_n.
   (a) Exprimer à l'aide de la formule des probabilités totales les probabilités a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n, c_n.
   (b) En déduire une matrice M telle qu'on ait pour tout nombre entier naturel n : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
   (c) Exprimer en fonction de p les probabilités a_n, b_n, c_n et leurs limites quand n tend vers $+\infty$.
2. Nombres moyens des passages en A, B, C entre les instants 1 et n.
   On désigne dans cette question par X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque S est au sommet A à l'instant n, et prenant la valeur 0 sinon.
   Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et son espérance $m_n = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, puis établir que :
   $$m_n = \frac{1}{3}\left[n + 2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}\right].$$
   Donner un équivalent de m_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin

Corrigé

1. (a) Pour commencer, on a $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, un calcul direct nous donne $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $J^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

   (b) Le plus simple est de montrer que $E=\mathrm{Vect}(I,J,J^2)$ car cela justifie que E est un espace vectoriel et cela répond partiellement à la question 1.c). On constate que

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R},\quad M(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=xI+yJ+zJ^2$$

   donc $E=\mathrm{Vect}(I,J,J^2)$.

   (c) D'après la question précédente, la famille (I,J,J^2) est une famille génératrice de E. Il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soit a,b,c trois réels tels que

$$\begin{aligned}aI+bJ+cJ^2 &= 0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})}\Leftrightarrow a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}\end{aligned}$$

   Par conséquent, la famille (I,J,J^2) est une base de E.

2. (a) On procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\ \vdots\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix}\ \vdots\ \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\ \left|\ \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}\right.\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&0&-3\end{pmatrix}\ \vdots\ \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}\ \left|\ L_3\leftarrow 2L_3-L_2\right.\end{aligned}$$

   La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice P est inversible et l'on a

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}3&3&0\\0&-6&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\ \vdots\ \begin{pmatrix}2&-1&2\\-2&4&-2\\-1&-1&2\end{pmatrix}\ \left|\ \begin{matrix}L_1\leftarrow 3L_1+L_3\\L_2\leftarrow 3L_2-L_3\end{matrix}\right.\\ \Leftrightarrow&\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-6&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\ \vdots\ \begin{pmatrix}2&2&2\\-2&4&-2\\-1&-1&2\end{pmatrix}\ \left|\ L_1\leftarrow 2L_1+L_2\right.\\ \Leftrightarrow&\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ \vdots\ \begin{pmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\\frac13&-\frac23&\frac13\\\frac13&\frac13&-\frac23\end{pmatrix}\ \left|\ \begin{matrix}L_1\leftarrow \frac16 L_1\\L_2\leftarrow -\frac16 L_2\\L_3\leftarrow -\frac13 L_3\end{matrix}\right.\end{aligned}$$

   donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\\frac13&-\frac23&\frac13\\\frac13&\frac13&-\frac23\end{pmatrix}$. **Vérification** $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\\frac13&-\frac23&\frac13\\\frac13&\frac13&-\frac23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Un calcul direct nous donne

$$P^{-1}M(x,y,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y & \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y & \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y & -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y & -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y \end{pmatrix} \quad P^{-1}M(x,y,z)P = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y \end{pmatrix}$$

(b) En utilisant la fameuse formule $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$, l'égalité de la question 2.a) nous donne

$$P^{-1}[M(x,y,y)]^nP = \begin{pmatrix} (x+2y)^n & 0 & 0 \\ 0 & (x-y)^n & 0 \\ 0 & 0 & (x-y)^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow [M(x,y,y)]^n = P\begin{pmatrix} (x+2y)^n & 0 & 0 \\ 0 & (x-y)^n & 0 \\ 0 & 0 & (x-y)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

Puis, par un calcul direct, on a

$$P\begin{pmatrix} (x+2y)^n & 0 & 0 \\ 0 & (x-y)^n & 0 \\ 0 & 0 & (x-y)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+2y)^n & (x-y)^n & (x-y)^n \\ (x+2y)^n & -(x-y)^n & 0 \\ (x+2y)^n & 0 & -(x-y)^n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} [M(x,y,y)]^n &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n \\ -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & \frac{2}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n \\ -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & \frac{2}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(x+2y)^n\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(x-y)^n\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(x+2y)^nM(1,1,1) + \frac{1}{3}(x-y)^nM(2,-1,-1) \end{aligned}$$

Partie II.

1. (a) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements A_n, B_n, C_n et en utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n\cap A_{n+1}) + P(B_n\cap A_{n+1}) + P(C_n\cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{(A_n)}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{(B_n)}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{(C_n)}(A_{n+1}) \\ &= (1-2p)P(A_n) + pP(B_n) + pP(C_n) \\ P(B_{n+1}) &= P(A_n\cap B_{n+1}) + P(B_n\cap B_{n+1}) + P(C_n\cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{(A_n)}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{(B_n)}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{(C_n)}(B_{n+1}) \\ &= pP(A_n) + (1-2p)P(B_n) + pP(C_n) \\ P(C_{n+1}) &= P(A_n\cap C_{n+1}) + P(B_n\cap C_{n+1}) + P(C_n\cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{(A_n)}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{(B_n)}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{(C_n)}(C_{n+1}) \\ &= pP(A_n) + pP(B_n) + (1-2p)P(C_n) \end{aligned}$$

ce qui implique les égalités suivantes $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = (1-2p)a_n + pb_n + pc_n \\ b_{n+1} = pa_n + (1-2p)b_n + pc_n \\ c_{n+1} = pa_n + pb_n + (1-2p)c_n \end{cases}$

(b) Il est immédiat que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2p & p & p \\ p & 1-2p & p \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M(1-2p,p,p)\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

(c) Il est immédiat que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = [M(1-2p,p,p)]^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Comme le point S est situé initialement en A et d'après **II.2.b.**, on a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= \left[\frac{1}{3}((1-2p)+2p)^n M(1,1,1) + \frac{1}{3}((1-2p)-p)^n M(2,-1,-1)\right]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\
&= \left[\frac{1}{3}M(1,1,1) + \frac{1}{3}(1-3p)^n M(2,-1,-1)\right]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\
&= \left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}(1-3p)^n\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui entraine les égalités suivantes $\begin{cases} a_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n \\ b_n = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \\ c_n = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \end{cases}$

2. La variable aléatoire $X_1+X_2+\cdots+X_n$ représente le nombre de fois où S passe par le A et son espérance m_n vaut

$$m_n = E(X_1+X_2+\cdots+X_n) = E(X_1)+\cdots+E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

Par construction, on a

$$E(X_k) = 0\times P(X_k=0) + 1\times P(X_k=1) = P(X_k=1) = P(A_k) = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^k$$

on a donc

$$\begin{aligned}
m_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(1-3p)^k \underset{j=k-1}{=} \frac{1}{3}n+\frac{2}{3}\sum_{j=0}^{n-1}(1-3p)^{j+1} \\
&= \frac{1}{3}n+\frac{2}{3}(1-3p)\sum_{j=0}^{n-1}(1-3p)^j = \frac{1}{3}n+\frac{2}{3}(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{1-(1-3p)} \\
&= \frac{1}{3}n+\frac{2}{3}(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p} = \frac{1}{3}\left[n+2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}\right].
\end{aligned}$$

Lorsque $n\to+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}\right] = 2(1-3p)\frac{1}{3p}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc

$$m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}n$$