Vendredi 16 Juin 2017

Probabilités

Exercice 1

Partie I : Calcul matriciel

On considère les trois matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = QMQ$.

1. Calculer $Q \times Q$. En déduire que Q est inversible et expliciter Q^{-1}.
2. Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).
   Justifier que $M = QDQ$.
3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QD^nQ$.
4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Partie II : Etude d'une expérience

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une d ces pièces vaut $\frac{1}{2}$.
On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :
- à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que le deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :
- A_n : « obtenir 0 Pile à l'étape n »,
- B_n : « obtenir 1 Pile à l'étape n »,
- C_n : « obtenir 2 Piles à l'étape n ».

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   Calculer les trois probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.
   Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n, \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n. \end{cases}$$
4. (a) Vérifier que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$
   où la matrice M a été définie dans la partie I.

Exercice 2

Dans un jeu, il y a n numéros (de 1 à n) dont p numéros gagnants choisis à l'avance et connus du seul meneur de jeu. On suppose $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $p \in \mathbb{N}^{\times}$, $p \leqslant \dfrac{n}{3}$.
Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard, successivement, p numéros différents. Le meneur dévoile alors p numéros perdants parmi les $n-p$ numéros qui n'ont pas été tirés.
Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies.
Stratégie A : il garde les p numéros qu'il a tirés.
Stratégie B : il échange les p numéros qu'il a tirés contre p nouveaux numéros tirés au hasard, successivement, parmi les $n-2p$ numéros qui n'ont été ni tirés, ni dévoilés durant la première phase.
Le but de l'exercice est de déterminer laquelle des deux stratégies permet d'espérer obtenir le plus de numéros gagnants.

1. **Etude de la stratégie A** : On note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la première phase.
   Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.
   En déduire les formules (1) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k} = \binom{n}{p}$ (2) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k\binom{k}{p}\binom{n-p}{p-k} = \frac{p^2}{n}\binom{n}{p}$

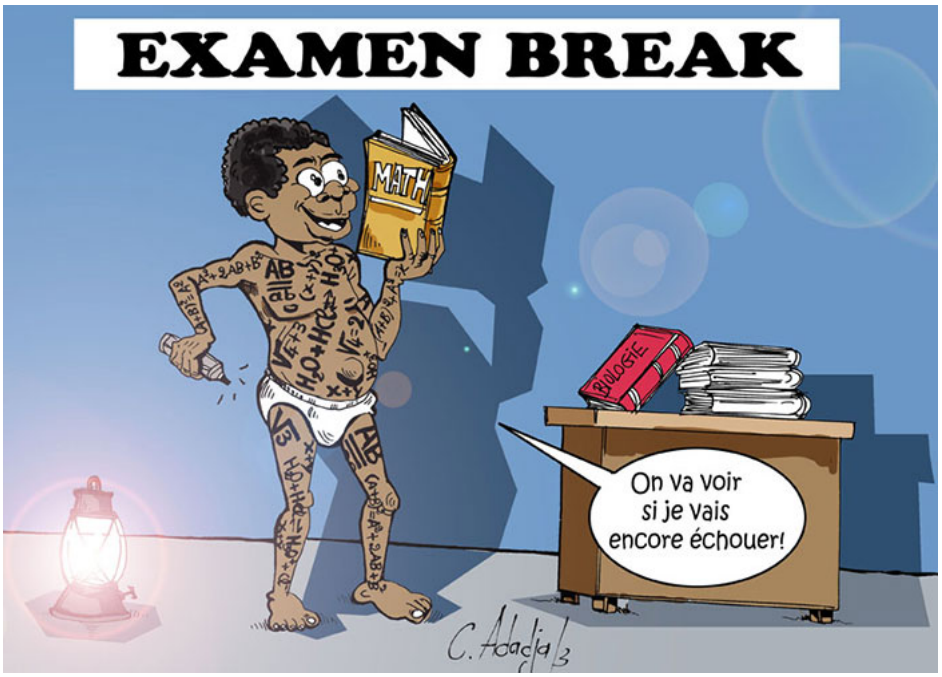
2. **Etude de la stratégie B** :
   Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on note Z_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{ième}$ numéro tiré dans la deuxième phase est gagnant, 0 sinon.
   On note Z la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la deuxième phase.

   (a) Soient $k \in [\![0,p]\!]$ et $i \in [\![1,p]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Z_i = 1)$.

   (b) Pour $1 \leqslant i \leqslant p$ démontrer que : $P(Z_i = 1) = \dfrac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (p-k)\binom{k}{p}\binom{n-p}{p-k}$

   (c) Quelle est la relation liant Z et les variables $(Z_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$? En déduire que : $E(Z) = \dfrac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}$.

3. Des stratégies A et B, laquelle est préférable ?



CORRIGÉ

Exercice 1

Partie I

1. On remarque que $Q \times Q = I_3$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Ainsi la matrice Q est inversible et son inverse est : $Q^{-1} = Q$.
2. On calcule le produit de matrices :

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice D est donc bien diagonale.
On a alors :

$$D = QMQ \Longleftrightarrow Q^{-1}DQ^{-1} = M \Longleftrightarrow QDQ = M \Longleftrightarrow M = QDQ$$

3. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$: « $M^n = QD^nQ$ »
   - Pour $n = 0$, on a $M^0 = I_3$ et $QD^0Q = Q^2 = I_3$. Ainsi, $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vérifiée. On a alors :

$$M^{n+1} = M^nM \overset{(\mathcal{H}(n))}{=} (QD^nQ)(QDQ) = QD^nDQ = QD^{n+1}Q$$

   donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, la propriété $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
4. On a alors :

$$\begin{aligned} M^n = QD^nQ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(\frac{1}{2})^n & -2(\frac{1}{2})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n & 1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 2(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie II

1. On lance une fois les deux pièces. Notons P_1 (reps. P_2) l'événement « On fait Pile avec la pièce numéro 1 (resp. numéro 2) ». On a alors :

$$a_1 = P(A_1) = P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P(F_2) = \frac{1}{4}$$

$$b_1 = P(B_1) = P(P_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = P(C_1) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P(P_2) = \frac{1}{4}$$

2. Si A_n est réalisé, on a obtenu 0 Pile à l'étape n, donc on ne va lancer aucune pièce à l'étape $n+1$. Ainsi, on est certain que A_{n+1} sera réalisé.

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$$

Si B_n est réalisé, on a obtenu 1 Pile à l'étape n, donc on va lancer une pièce à l'étape $n+1$. On obtient A_{n+1} si et seulement si cette pièce donne Pile, on a donc :

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

Si C_n est réalisé, on a obtenu 2 Pile à l'étape n, donc on va lancer deux pièces à l'étape $n+1$. On est dans la même configuration que l'étape 1, donc :

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

Soit $n \geqslant 1$. On sait que (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements, donc d'après la formules des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. On a donc bien pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Pour $n = 1$, on a bien $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^{1-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'on ait $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Donc par récurrence, la formule est bien vérifiée pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 2

1. Le joueur peut avoir entre 0 et p numéros gagnants lors de la première phase donc $X(\Omega) = [\![0, p]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad P(X = k) = \frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}}$$

Justification des calculs de probabilité : *On dispose ici d'une population de taille n (les numéros) ainsi que d'une sous-population de taille p (les numéros gagnants). On pioche p éléments de la population glabale et X désigne le nombre d'éléments de la sous-population donc X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(p, n, p)$*
On peut aussi le justifier ainsi : pour les cas favorables, on choisit k numéros parmi les p numéros gagnants ($\binom{p}{k}$ choix) et les autres $p-k$ numéros sont choisit parmi les $n-p$ numéros non gagnants ($\binom{n-p}{p-k}$ choix), pour les cas possibles, on choisit p numéros parmi les n disponibles ($\binom{n}{p}$ choix) donc $P(X = k) = \dfrac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}}$.

Puisque X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(p, n, p)$, il est immédiat que $E(X) = p \times \dfrac{p}{n} = \dfrac{p^2}{n}$.
Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} P(X = k) &= 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{n}{p} \\
E(X) &= \frac{p^2}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} kP(X = k) = \frac{p^2}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} k\frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}} = \frac{p^2}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} k\binom{p}{k}\binom{n}{p-k} = \frac{p^2}{n}\binom{n}{p}
\end{aligned}$$

2. (a) La probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Z_i = 1)$ signifie que l'évènement $(X = k)$ est réalisé et que l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(Z_i = 1)$, c'est-à-dire que lors de la première phase du jeu, on a pioché k numéros gagnants et que l'on souhaite, lors de la seconde phase du jeu, que le i-ième numéro tiré soit un numéro gagnant. Autrement dit, au début de la seconde phase de jeu, on dispose de $n - 2p$ numéros dont $p - k$ sont gagnants (puisque le joueur a enlevé p numéros dont k numéros gagnants et le meneur a retiré p numéros tous perdants) et l'on souhaite que le i-ième numéro tiré parmi ces $n - 2p$ numéros soit gagnant. La probabilité que le i-ième numéro pioché soit gagnant est donc $\dfrac{p-k}{n-2p}$,ce qui implique que $P_{(X=k)}(Z_i = 1) = \dfrac{p-k}{n-2p}$.
Remarque : on pioche simultanément les numéros, chaque numéro a cette probabilité d'être gagnant mais la probabilité d'avoir q numéros gagnants n'est pas $\left(\dfrac{p-k}{n-2p}\right)^q$ car les tirages ne sont pas indépendants.

(b) L'évènement $(Z_i = 1)$ signifie que le i-ième numéro pioché soit gagnant, cela dépend évidemement du nombre de numéros gagnants dans la première phase du jeu, ce qui est décrit mathématiquement par les évènements $(X = k)_{k\in[\![0,p]\!]}$. La formule des probabilités totales appliquée à ce système complet d'évènements nous donne

$$\begin{aligned}
P(Z_i = 1) &= \sum_{k=0}^{p} P(X = k \cap Z_i = 1) = \sum_{k=0}^{p} P(X = k)P_{(X=k)}(Z_i = 1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}} \frac{p-k}{n-2p} \\
&= \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} (p-k)\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}
\end{aligned}$$

(c) Il est immédiat que $Z = \sum\limits_{i=1}^{p} Z_i$ (revoir pour cela le cours sur les variables de Bernouilli) donc $E(Z) = \sum\limits_{i=1}^{p} E(Z_i)$.
Ensuite, l'espérance d'une variable de Bernouilli Z_i est égale à la probabilité $P(Z_i = 1)$. D'après les relations (1) et (2) obtenues à la question 1 et en scindant en deux la somme définissant $P(Z_i = 1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(Z_i = 1) &= \frac{p}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{p-k} - \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} k\binom{p}{k}\binom{n}{p-k} \\
&= \frac{p}{(n-2p)\binom{n}{p}}\binom{n}{p} - \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}}\frac{p^2}{n}\binom{n}{p} = \frac{np-p^2}{(n-2p)n}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{p} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{p} \frac{np-p^2}{(n-2p)n} = \frac{np-p^2}{(n-2p)n} \times p = \frac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}$$