

Samedi 10 Juin 2017

Séries Numériques



Dans tout le problème, on considère les suites $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln n$$

Partie I –

1. Etablir pour tout entier naturel k non nul l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2. a. Quelle est la limite de la suite (H_n) ?

b. En utilisant le résultat de la question I.1, montrer pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

c. En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.

3. a. En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question I.1, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.

4. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* . On pose pour tout entier naturel non nul k :

$$J_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2} \right)^2 f''(t) dt$$

a. Etablir pour tout entier naturel non nul k l'égalité suivante :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) dt$$

b. En déduire pour tout entier naturel non nul n la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{x}$.

a. Etablir pour tout entier naturel non nul k la double inégalité suivante :

$$0 \leq J_k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

b. En déduire que la série de terme général J_k est convergente.

c. En déduire également, pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{8n^2}$$

d. En déduire le développement asymptotique suivant :

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Partie II –

On considère les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ définies par :

$$\forall n \geq 1, x_n = u_n - \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, y_n = x_n - x_{n-1}$$

1. a. Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$?

b. Justifier pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$

c. En déduire pour tout entier naturel non nul n l'égalité suivante :

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2 \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right)$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2 \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

Pour la dernière question, on va admettre le résultat suivant.

Si $\sum a_n$ est une série à termes positifs convergente et si $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$, alors $\sum b_n$ est également convergente (ce que l'on sait déjà) et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

3. En déduire que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Corrigé

Partie I -

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. \ln est continue sur $]k, k+1[$ et dérivable sur $]k, k+1[$ de dérivée $t \mapsto \frac{1}{t}$. De plus, pour tout $t \in]k, k+1[$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a bien

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2. a. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est une série à termes positifs divergente. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question I.1,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ce qui donne

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$$

On en déduit l'inégalité demandée.

- c. Pour tout $n \geq 2$,

$$1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{n \ln(n)} = 1$$

ou encore

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \geq 0$ d'après la question I.1. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n) \geq \frac{1}{n} \geq 0$ d'après la question I.2.b. Ainsi $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée : elle converge vers un réel γ . Puisque $(u_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0, $\gamma \geq 0$. De plus, $u_1 = 1$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante donc $\gamma \leq 1$.
4. a. Il s'agit d'intégrer deux fois par parties. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{2} \left[\left(t - k - \frac{1}{2} \right)^2 f'(t) \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2} \right) f'(t) dt \\ &= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \left[\left(t - k - \frac{1}{2} \right) f(t) \right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} f(t) dt \\ &= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) dt \end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} [f'(k+1) - f'(k)] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} [f(k+1) + f(k)] + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt$$

On remarque un télescopage dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f'(k+1) - f'(k) = f'(n) - f'(1)$$

On utilise un changement d'indice dans la seconde somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^n f(k) + \sum_{k=2}^n f(k) = 2 \sum_{k=1}^n f(k) - f(1) - f(n)$$

Enfin, la relation de Chasles pour les intégrales montre que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_1^n f(t) dt$$

On en déduit alors la relation demandée.

5. a. Remarquons tout d'abord que f est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(t) = \frac{2}{t^3}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$-\frac{1}{2} \leq t - k - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

donc

$$0 \leq \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

Puisque f'' est positive sur $[k, k+1]$, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$0 \leq \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t) \leq \frac{1}{4} f''(t) = \frac{1}{2t^3}$$

La croissance de l'intégrale montre alors que

$$0 \leq J_k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

b. L'intégrale de la question I.5.a se calcule aisément de sorte que

$$0 \leq J_k \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \leq \frac{1}{8k^2}$$

Puisque la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{8k^2}$ converge, il en est de même de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} J_k$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier supérieur ou égal à n . En reprenant la question I.5.b,

$$0 \leq \sum_{k=n}^p J_k \leq \frac{1}{8} \sum_{k=n}^p \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

puis, par télescopage,

$$0 \leq \sum_{k=n}^p J_k \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right)$$

Par passage à la limite (justifié puisque $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} J_n$ converge)

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{8n^2}$$

d. D'après la question I.4.b appliquée à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8} - \frac{1}{n^2} + \ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

En notant $S = \sum_{k=1}^{+\infty} J_k$ et $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} J_k$, ceci s'écrit également

$$u_n = \frac{5}{8} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} + S - R_n$$

D'après la question I.3.b, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma$. De plus, (R_n) converge vers 0 (reste d'une série convergente ou théorème des gendarmes appliqué au résultat de la question II.1.c). Un passage à la limite donne donc

$$\gamma = \frac{5}{8} + S$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} - R_n$$

ou encore

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} - R_n$$

La question II.1.c montre que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit le développement asymptotique demandé.

Partie II -

1. a. Puisque (u_n) est de limite γ d'après la question I.3.b, (x_n) est également de limite γ .
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $p \geq n + 1$, un télescopage donne

$$\sum_{k=n+1}^p y_k = x_p - x_n$$

Par passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k = \gamma - x_n$$

- c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $k \geq n + 1$,

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - x_{k-1} \\ &= H_k - \ln(k) - \frac{1}{2k} - H_{k-1} + \ln(k-1) + \frac{1}{2(k-1)} \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k-1)} + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2 \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité demandée.

2. Tout d'abord

$$\begin{aligned} \frac{1}{k-1} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \\ &\underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) \\ &\underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \end{aligned}$$

Ensuite

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Après calcul, on trouve bien

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

3. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ est une série à termes positifs convergente donc d'après le résultat admis et la question ??,

$$\gamma - x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Or par comparaison à une intégrale,

$$\int_{n+1}^{p+1} \frac{dt}{t^3} \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^3} \leq \int_n^p \frac{dt}{t^3}$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right) \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

puis par passage à la limite

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2}$$

On en déduit sans peine que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

de sorte que

$$\gamma - x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

ce qui s'écrit encore

$$\gamma - x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque

$$x_n = u_n - \frac{1}{2n} = H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n}$$

on en déduit le développement asymptotique demandé.

