Simulation Concours Blanc

Samedi 19 Mars 2017

Exercice 1

Q1) Soit $F_1(X) = \dfrac{X}{X^3 - 1}$.

a) Décomposer $F_1(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

b) Soit $f : t \mapsto \dfrac{t}{t^3 - 1}$. Pour $x < 1$, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \int_0^x f(t)\,dt$.

Pour $n \geqslant 1$ on note $F_n(X) = \dfrac{X}{(X-1)^n(X^2+X+1)}$.

Q2) Justifier l'existence de réels $a_1, a_2, \dots, a_n, c_n, d_n$ (on ne demande pas leur valeur), tels que :

$$F_n(X) = \frac{a_1}{X-1} + \cdots + \frac{a_n}{(X-1)^n} + \frac{c_n X + d_n}{X^2+X+1}$$

Q3) Soit $g : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$.

a) Montrer que $g(x) = a_n + a_{n-1}(x-1) + \cdots + a_1(x-1)^{n-1} + \underset{1}{o}\big((x-1)^{n-1}\big)$ (ce sont les nombres a_k définis à la question précédente). Que représente cette expression pour la fonction g ?

b) Quelle est l'expression de a_k ($1 \leqslant k \leqslant n$) en fonction de g ?

c) Montrer que $c_n = -a_1$ et que $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$.

Q4) Application :

a) Calculer un $\mathrm{dl}_3(1)$ de $g(x)$.

b) En déduire la décomposition de $F_4(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2

On pose $E = \mathbb{K}^3$, $\mathrm{id} = \mathrm{id}_E$ (identité de E) et $u : E \to E$ l'application définie par :

$$u(x, y, z) = (3y - 2z; -6x + 9y - 4z; -6x + 6y - z).$$

On pose également $p = 3\mathrm{id} - u$, $q = u - 2\mathrm{id}$, $F = \ker(p)$ et $G = \ker(q)$.

Q1) a) Montrer que u est un endomorphisme de E et que u vérifie : $u^2 - 5u + 6\mathrm{id} = 0$.

b) En déduire que u est un automorphisme de E. Expliciter $u^{-1}(x, y, z)$.

Q2) a) Montrer que $u \circ q = q \circ u = 3q$ et $u \circ p = p \circ u = 2p$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u^n = 3^n q + 2^n p$.

c) Vérifier que la relation ci-dessus est vraie pour $n = -1$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, u^n = 3^n q + 2^n p$$

Q3) a) Montrer que F est un plan vectoriel, que G est une droite vectorielle et que $E = F \oplus G$.

b) Montrer que p et q sont des projecteurs et que $p \circ q = q \circ p = 0$.

c) Plus précisément, montrer que p est la projection sur G parallèlement à F et que q est la projection sur F parallèlement à G.