Devoir Maison : Lundi 15 Janvier 2018

Développements Limités

Niveau 2-3

Exercice 1 *Le but de cet exercice est d'étudier la fonction* f *définie par*

$$f(x) = (x+1)^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}}$$

i.e $f(x)$ *est égal à* $x+1$ *élevé à la puissance* $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

1. *Déterminer* D_f *le domaine de définition de* f.
2. *Déterminer la limite de* f *en* $x = -1$.
   Peut-on prolonger f *par continuité en* -1 *?*
3. *Si vous avez répondu* oui *à la question précédente, le prolongement obtenu est-il dérivable en* -1 ?
   La courbe représentative (C_f) *de* f *admet-elle une tangente en* $x = -1$ *?*
4. *Déterminer un développement limité de* f *en* $x = 0$ *à l'ordre* 2.
5. *En déduire que* f *est prolongeable par continuité en* $x = 0$ *et que ce prolongement est dérivable en* 0.
   Préciser la valeur de la dérivée et la position de (C_f) *par rapport à la tangente en* $x = 0$.
6. *Déterminer la limite de* f *en* $+\infty$
   Y-a-t il une asymptote en $+\infty$ *?*
7. *Sur quel ensemble la fonction* f *éventuellement prolongée est-elle continue.*
   Même question pour la dérivabilité.
8. *Déterminer la dérivée de* f *éventuellement prolongée ainsi que son signe.*
9. *Tracer la courbe* (C_f).

Exercice 2 *On pose* $f(x) = \sqrt{x(x+2)}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. *Donner le domaine de définition de* f.
2. *Déterminer le développement limitéd'ordre 2 de* $\dfrac{f(x)}{x}$ *en* $+\infty$.
3. *La courbe représentative de* f *admet-elle une droite asymptote en* $+\infty$? *Si oui, donner son équation et la position de la courbe représentative de* f *par rapport à cette asymptote.*
4. *Mêmes questions en* $-\infty$.

Corrigé

Exercice 1 *Le but de cet exercice est d'étudier la fonction* f *définie par*

$$f(x) = (x+1)^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}}$$

i.e $f(x)$ *est égal à* $x+1$ *élevé à la puissance* $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

1. *Déterminer* D_f *le domaine de définition de* f.

   Solution. $f(x) = \exp\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\ln(x+1)\right)$ *est défini si* $x \geq -1$ *et si* $x \neq 0$ *(* $\ln(x+1)$ *est défini ssi* $x > -1$, $\sqrt{x+1}$*est défini ssi* $x \geq 1$ *et on exclue la valeur* 0 *pour la division)*

   $$\underline{D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[}$$

   ■

2. *Déterminer la limite de* f *en* $x = -1$.
   Peut-on prolonger f *par continuité en* -1 *?*

   Solution. *Posons* $x = -1 + h$, *avec* $h \to 0$. *On a* $f(-1+h) = \exp\left(\frac{\sqrt{h}}{h+1}\ln(h)\right)$
   Puisque $\sqrt{h}\ln(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, *(croissances comparées), on a (par continuité de l'exponentielle en* $x = 0$ *)* $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \exp(0) = 1$

   $$\underline{\text{On pose donc } f(-1) = 1, \text{ la fonction est alors continue en } x = -1}$$

   Remarque : *On peut toujours prolonger une fonction en donnant un sens à* $f(-1)$, *en revanche il est plus difficile d'obtenir un prolongement continu.* ■

3. *Si vous avez répondu* oui *à la question précédente, le prolongement obtenu est-il dérivable en* -1 *?*

   La courbe représentative (C_f) *de* f *admet-elle une tangente en* $x = -1$ *?*

   Solution. *On a*

   $$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{h}}{h+1}\ln(h)\right) - 1}{h} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{h}}{h+1}\ln(h)}{h} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{\ln(h)}{\sqrt{h}} \to -\infty$$

   La fonction prolongée n'est pas dérivable en $x = -1$ *mais admet une tangente verticale.* ■

4. *Déterminer un développement limité de* f *en* $x = 0$ *à l'ordre* 2.

   Solution. *Attention, piège. La présence du* $\frac{1}{x}$ *oblige à partir d'un DL de* $\ln(1+x)$ *à l'ordre* 3,*qui donne ensuite un DL à l'ordre 2 de* $\frac{\ln(x+1)}{x}$.
   L'erreur la plus fréquente consiste à faire un DL_3 *de* $\sqrt{x+1}$, *de le diviser par* x, *on obtient alors* $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. *Si l'on multiplie ce DL par celui, à l'ordre* 2, *de* $\ln(1+x)$, *le résultat est un* DL_1. *En effet, on est amené à faire le produit* $\frac{1}{x} \times \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) = \underset{x\to 0}{o}(x)$. *Cela*

ne contredit pas le cours, qui spécifie qu'il faut avoir deux DL_2 pour obtenir un DL_2. Ici, $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ n'est pas un DL !

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1}\frac{\ln(x+1)}{x} &= \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)\times\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= 1-\frac{x^2}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Puis par composition

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right)$$

donc

$$\begin{aligned} \exp\left(\sqrt{x+1}\frac{\ln(x+1)}{x}\right) &= \exp\left(1-\frac{x^2}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= e\times\exp\left(-\frac{x^2}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= e\times\left(1-\frac{x^2}{24}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= e - \frac{ex^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

■

5. En déduire que f est prolongeable par continuité en $x = 0$ et que ce prolongement est dérivable en 0.
   Préciser la valeur de la dérivée et la position de (C_f) par rapport à la tangente en $x = 0$.

   Solution. D'après le cours, si on pose $f(0) = e$ la fonction est continue en 0, dérivable de dérivée $f'(0) = 0$
   L'équation de la tangent est $y_T = 1$ (elle est horizontale). On a $f(x) - y_T \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{ex^2}{24} < 0$. La courbe est sous sa tangente en 0. ■

6. Déterminer la limite de f en $+\infty$
   Y-a-t il une asymptote en $+\infty$?

   Solution. D'après les croissances comparées

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x}\ln(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \to 0^+$$

   donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1^+$$

   La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$. ■

7. Sur quel ensemble la fonction f éventuellement prolongée est-elle continue.
   Même question pour la dérivabilité.

   Solution. f est maintenant définie et continue sur $[-1, +\infty[$ dérivable sur $]-1, +\infty[$.
   En effet elle est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f. On l'a ensuite prolongé par continuité en -1 et en 0, mais seul en 0 le prolongement obtenu est dérivable. ■

8. Déterminer la dérivée de f éventuellement prolongée ainsi que son signe.

Solution. *Si* $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\left(f(x)\right) &= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\ln(x+1)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{x\ln(x+1)+2\ln(x+1)-2x}{\sqrt{(x+1)}x^2}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{(x+2)\left(\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}\right)}{\sqrt{(x+1)}x^2}\end{aligned}$$

On étudie

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$$

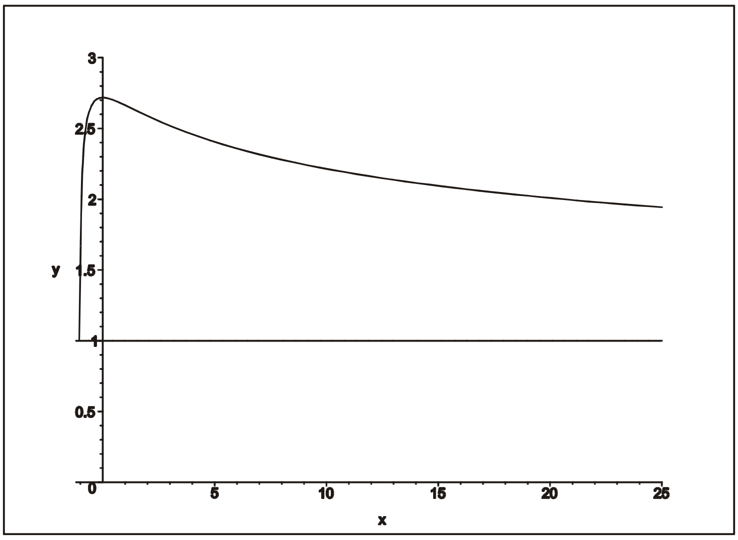
dérivable sur $]-1,+\infty[$ *avec*

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}\right)\\ &= \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \geq 0\end{aligned}$$

Puisque $g(0) = 0$ *on a le signe de* f'

■

9. *Tracer la courbe* (C_f).



Remarque : *cela ne se voit pas mais la limite en* $+\infty$ *est bien* 1 *!*

Exercice 2 *On pose* $f(x) = \sqrt{x(x+2)}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. *Donner le domaine de définition de* f.

   Solution. f *est définie si* $x \neq 0$ *et si* $x(x+2) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty,-2] \cup]0,+\infty[$ ■

2. *Déterminer le développement limité d'ordre* 2 *de* $\frac{f(x)}{x}$ *en* $+\infty$.

   Solution. *Posons* $x = \frac{1}{h}$ *avec* $h \to 0^+$. *Alors*

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x(x+2)}{x^2}}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

car $\sqrt{x^2} = x$ *si* $x > 0$. *D'où*

$$f(x) = \sqrt{h\left(\frac{1}{h}+2\right)}e^h = \sqrt{1+2h}e^h$$

On fait ensuite le produit des développements limités de $\sqrt{1+2h} = 1 + h - \frac{1}{2}h^2 + o\left(h^2\right)$ *et de* $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)$ *pour obtenir*

$$\sqrt{1+2h}e^h = 1 + 2h + h^2 + o\left(h^2\right)$$

On revient à la variable initiale

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

■

3. *La courbe représentative de* f *admet-elle une droite asymptote en* $+\infty$ *? Si oui, donner son équation et la position de la courbe représentative de* f *par rapport à cette asymptote.*

   Solution. *On déduit de la question précédente que*

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

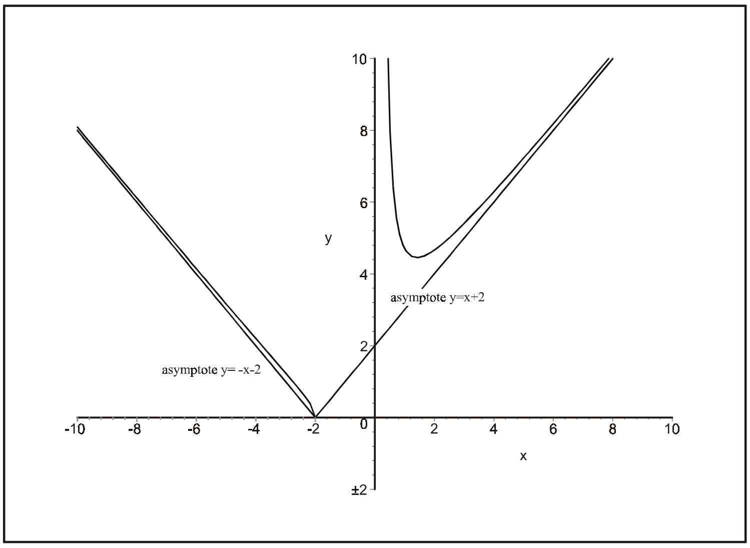
   Ainsi la droite d'équation $y = x + 2$ *est asymptote, la courbe est localement au dessus de l'asymptote (cf cours)* ■

4. *Mêmes questions en* $-\infty$.

   Solution. *Même genre de technique, mais* $x = -\sqrt{x^2}$ *donc*

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= -\sqrt{\frac{x(x+2)}{x^2}}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= -x - 2 - \frac{1}{x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

   La droite d'équation $y = -x - 2$ *est asymptote et la courbe est encore au dessus.*



■