Polynômes de Chebyshev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la manière suivante :

$$T_0(\mathrm{X}) = 1, \quad T_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}, \quad \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N} :\ T_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})$$

Première partie

1. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5.
2. Montrer que pour tout entier n :
   (a) T_n est de degré n et son terme dominant est $2^{n-1}\mathrm{X}^n$.
   (b) T_n a la parité de n.
   (c) $T_n(1) = 1$.
3. Montrer que : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \leq n \Rightarrow 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.
4. Prouver que : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2,\ T_m(T_n(\mathrm{X})) = T_{mn}(\mathrm{X})$.
   En déduire un isomorphisme entre $(\mathbb{N}, \times)$ et $\{T_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Deuxième partie

1. Montrer que : $\forall\,\alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ et $T_n(\cosh\alpha) = \cosh(n\alpha)$.
2. Etablir que, pour tout $n \geq 1$, les zéros de T_n sont réels, distincts deux à deux, qu'ils sont dans $]-1,1[$, et qu'ils sont donnés par $\forall\, k = 0,\dots,n-1\ :\ x_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$.
3. (a) Montrer que : $\forall\,\alpha \in]0,\pi[,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ T_n'(\cos\alpha) = n\dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}$.
   (b) En déduire les extrémums de T_n (avec $n \geqslant 2$) et en quels points ils sont atteints.
4. Pour $n \geqslant 1$, décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{T_n}$ en éléments simples.
5. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (1-\mathrm{X}^2)T_n'' - \mathrm{X}T_n' + n^2T_n = 0$.

Troisième partie

Dans cette partie, P est un polynôme à coefficients réels de monôme dominant $\lambda\mathrm{X}^n$, avec $n \geq 1$.

1. Montrer que $\sup\{|P(x)|,\ x \in [-1,1]\} \geq \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
   Indication : Raisonner par l'absurde et considérer le polynôme $Q = 2^{n-1}P - \lambda T_n$.
2. Plus généralement, montrer que $\forall\, a, b\ :\ \sup\{|P(x)|,\ a \leq x \leq b\} \geq \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^n \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
   Indication : Utiliser un changement de variable pour se ramener au segment $[-1,1]$.

Corrigé

Première partie

1. On trouve successivement :

   $T_2(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_1(\mathrm{X}) - T_0(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^2 - 1.$

   $T_3(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_2(\mathrm{X}) - T_1(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}(2\mathrm{X}^2 - 1) - \mathrm{X} = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}.$

   $T_4(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_3(\mathrm{X}) - T_2(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}(4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}) - (2\mathrm{X}^2 - 1) = 8\mathrm{X}^4 - 8\mathrm{X}^2 + 1.$

   $T_5(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_4(\mathrm{X}) - T_3(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}(8\mathrm{X}^4 - 8\mathrm{X}^2 + 1) - (4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}) = 16\mathrm{X}^5 - 20\mathrm{X}^3 + 5\mathrm{X}.$

2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on va montrer la propriété suivante :
   $\mathcal{P}(n)$: “Il existe U_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $T_n(\mathrm{X}) = 2^{n-1}\mathrm{X}^n + U_n(\mathrm{X})$”.
   La propriété est vraie si $n = 1$ et $n = 2$, avec $U_1 = 0$ et $U_2 = -1$.
   On se donne maintenant $n \geqslant 1$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
   Dans ces conditions :

   $$\begin{aligned} T_{n+2}(\mathrm{X}) &= 2\mathrm{X}\,T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}(2^n\mathrm{X}^{n+1} + U_{n+1}(\mathrm{X})) - 2^{n-1}\mathrm{X}^n - U_n(\mathrm{X}) \\ &= 2^{n+1}\mathrm{X}^{n+2} + U_{n+2}(\mathrm{X}) \text{ avec } U_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,U_{n+1}(\mathrm{X}) - 2^{n-1}\mathrm{X}^n - U_n(\mathrm{X}) \end{aligned}$$

   Puisque $\deg(U_n) \leqslant n-1$ $\deg(U_{n+1}) \leqslant n$, U_{n+2} est bien dans $\mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$.

   Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.
   Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de terme dominant $2^{n-1}\mathrm{X}^n$.

   (b) Il suffit de prouver, pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $T_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n T_n(\mathrm{X})$.
   Elle est vraie si $n = 0$ (car T_0 est pair) et si $n = 1$ (car T_1 est impair).
   On se donne $n \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
   On en déduit :

   $$\begin{aligned} T_{n+2}(-\mathrm{X}) &= 2(-\mathrm{X})T_{n+1}(-\mathrm{X}) - T_n(-\mathrm{X}) = 2(-\mathrm{X})(-1)^{n+1}T_{n+1}(\mathrm{X}) - (-1)^n T_n(\mathrm{X}) \\ &= (-1)^{n+2}(2\mathrm{X}\,T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(\mathrm{X}) \end{aligned}$$

   Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.
   Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n a la parité de n.

   (c) La relation $T_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})$ donne $T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1)$.
   Or $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Une récurrence évidente donne alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = 1$.

3. On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : “$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Rightarrow 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$”.

   On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geqslant 0$.

   La propriété $\mathcal{P}(0)$ est évidente (car $T_0 = 1$), et la propriété $\mathcal{P}(1)$ n'est autre que la relation connue entre les polynômes T_{n-1}, T_n et T_{n+1} (car $T_1 = \mathrm{X}$).

   On se donne $m \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.

   On a donc les égalités $\begin{cases} (E_0) : 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m} \\ (E_1) : 2T_nT_{m+1} = T_{n+m+1} + T_{n-m-1} \end{cases}$ valables pour $n \geqslant m+2$.

   On forme alors $2\mathrm{X}(E_1) - (E_0)$ et on obtient :

   $2T_n(2\mathrm{X}\,T_{m+1} - T_m) = (2\mathrm{X}\,T_{n+m+1} - T_{n+m}) + (2\mathrm{X}\,T_{n-m-1} - T_{n-m})$, c'est-à-dire

   $2T_nT_{m+2} = T_{n+m+2} + T_{n-(m+2)}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(m+2)$ et achève la récurrence.

4. On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_m(T_n(\mathrm{X})) = T_{mn}(\mathrm{X})$.

   On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geqslant 0$.

   Les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont évidentes car $T_0 = 1$ et $T_1 = \mathrm{X}$.

   On se donne $m \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.

   On substitue $T_n(\mathrm{X})$ à X dans l'égalité $T_{m+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_{m+1}(\mathrm{X}) - T_m(\mathrm{X})$.

   On en déduit, pour tout n de $\mathbb{N}$, et en utilisant $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$:

   $T_{m+2}(T_n(\mathrm{X})) = 2T_n(\mathrm{X})\,T_{m+1}(T_n(\mathrm{X})) - T_m(T_n(\mathrm{X})) = 2T_n(\mathrm{X})\,T_{(m+1)n}(\mathrm{X}) - T_{mn}(\mathrm{X})$

   Mais d'après (3) on a $2T_n\,T_{(m+1)n} = T_{(m+2)n} - T_{mn}$.

   On en déduit $T_{m+2}(T_n(\mathrm{X})) = T_{(m+2)n}(\mathrm{X})$, ce qui prouve $\mathcal{P}(m+2)$ et achève la récurrence.

   Ainsi, pour tout m, n de $\mathbb{N}$, on a : $T_m(T_n(\mathrm{X})) = T_{mn}(\mathrm{X})$.

   L'application $\varphi : n \to T_n$ est injective ($n < m \Rightarrow \deg(T_n) < \deg(T_n) \Rightarrow T_n \neq T_n$).

   Elle est donc bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{T} = \{T_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

   De plus elle vérifie $\varphi(mn) = T_{mn} = T_m(T_n) = \varphi(m) \circ \varphi(n)$.

   L'application φ est donc un isomorphisme de $(\mathbb{N}, \times)$ sur $(\mathcal{T}, \circ)$.

Deuxième partie

1. Soit α un réel donné. Posons $u_n = \cos(n\alpha)$.

   On va prouver $T_n(u_1) = u_n$ par récurrence sur n. C'est évident si $n = 0$ et si $n = 1$.

   On suppose que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, avec $n \geqslant 0$.

   Alors pour tout $n \geqslant 0$, et en utilisant la relation $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$:

   $$T_{n+2}(u_1) = 2u_1T_{n+1}(u_1) - T_n(u_1) = 2u_1u_{n+1} - u_n = (u_{n+2} + u_n) - u_n = u_{n+2}$$

   Ce qui démontre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

   Pour l'égalité $T_n(\cosh\alpha) = \cosh(n\alpha)$, c'est exactement la même méthode, en utilisant cette fois la relation $2\cosh x\,\cosh y = \cosh(x+y) + \cosh(x-y)$.

2. Comme le suggère l'énoncé, on recherche des racines de T_n sur $]-1, 1[$.

   Pour tout x de $]-1, 1[$, il existe α dans $]0, \pi[$ tel que $x = \cos\alpha$.

   Alors : $T_n(x) = 0 \Leftrightarrow T_n(\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\alpha) = 0 \Leftrightarrow n\alpha = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

   Cette dernière condition s'écrit $n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $0 \leqslant k < n$ (car $0 < n\alpha < n\pi$).

   On a donc obtenu les $x_k = \cos\alpha_k$, avec $\alpha_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, et $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   Les α_k forment une suite strictement croissante de $]0, \pi[$.

   Les x_k forment donc une suite strictement décroissante de $]-1, 1[$.

   Dans l'intervalle $]-1, 1[$, on a ainsi obtenu n racines distinctes de T_n.

   Mais, comme T_n est de degré n, on a obtenu *toutes* les racines de T_n.

   Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme T_n possède n racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$, et données par $x_k = \cos\alpha_k$, avec $\alpha_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, et $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

3. (a) Pour tout α de $\mathbb{R}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

   On dérive cette égalité par rapport à α et on obtient : $(\sin\alpha)T_n'(\cos\alpha) = n\sin(n\alpha)$.

   En particulier, pour tout α de $]0,\pi[$ et n de $\mathbb{N}$, on a $T_n'(\cos\alpha) = \dfrac{n\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}$.

   (b) Pour $n \geqslant 2$, T_n a n racines distinctes x_k avec $1 > x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1} > -1$.

   Par "Rolle", T_n' s'annule sur chacun des $n-1$ intervalles ouverts $]x_{k+1}, x_k[$.

   Mais T_n' est de degré $n-1$. On obtient ainsi toutes ses racines.

   On remarque que si $x_k' = \cos\dfrac{k\pi}{n}$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$) on a $T_n'(x_k') = \dfrac{n\sin(k\pi)}{\sin(k\pi/n)} = 0$.

   Pour tout k de $\{1,\ldots,n-1\}$, on a $\alpha_{k-1} < \dfrac{k\pi}{n} < \alpha_k$ donc $x_{k-1} > x_k' > x_k$.

   Ainsi $1 > x_0 > x_1' > x_1 > x_2' > x_2 > \cdots > x_{n-1}' > x_{n-1} > -1$.

   Les réels $x_1',\ldots,x_n'$ sont donc les n racines de T_n'.

   En ces points, T_n' change de signe (racine simple) donc T_n présente un extrémum.

   Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, on a $T_n(x_k') = T_n\Big(\cos\frac{k\pi}{n}\Big) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

   On a ainsi obtenu tous les extrémums de T_n sur $[-1,1]$.

   NB : on savait déjà que $|T_n(x)| \leqslant 1$ sur $[-1,1]$, à cause $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ qui peut s'écrire $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ pour tout x de $[-1,1]$.

4. Pour $n \geqslant 1$, T_n a n racines distinctes x_k avec $1 > x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1} > -1$.

   La décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{T_n}$ s'écrit donc $\dfrac{1}{T_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\lambda_k}{\mathrm{X} - x_k}$.

   On a alors $\lambda_k = \dfrac{1}{T_n'(x_k)} = \dfrac{1}{T_n'(\cos\alpha_k)} = \dfrac{\sin\alpha_k}{n\sin(n\alpha_k)}$.

   Or $\sin(n\alpha_k) = \sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$ donc $\lambda_k = \dfrac{(-1)^k\sin\alpha_k}{n}$.

   On a donc obtenu la décomposition en éléments simples $\dfrac{1}{T_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k\sin\alpha_k}{\mathrm{X} - x_k}$

5. Pour tout α de $\mathbb{R}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

   On dérive une première fois par rapport à α et on obtient : $(\sin\alpha)T_n'(\cos\alpha) = n\sin(n\alpha)$.

   On dérive une deuxième fois par rapport à α et on obtient :

   $$(\cos\alpha)T_n'(\cos\alpha) - (\sin^2\alpha)T_n'(\cos\alpha) = n^2\cos(n\alpha).$$

   Autrement dit : $\forall\, n \in \mathbb{R},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ (\cos\alpha)T_n'(\cos\alpha) + (\cos^2\alpha - 1)T_n'(\cos\alpha) = n^2 T_n(\cos\alpha)$.

   Quand α parcourt $\mathbb{R}$, $x = \cos\alpha$ parcourt $[-1,1]$.

   On a donc obtenu $xT_n'(x) + (x^2-1)T_n'(x) = n^2T_n(x)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $[-1,1]$.

   Mais quand une égalité de fonctions polynomiales est vraie sur $[-1,1]$ (ou plus généralement sur un ensemble infini) alors elle est vraie partout.

   On a donc obtenu : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$.

   Ou encore (égalité entre polynômes) : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (1-\mathrm{X}^2)T_n'' - \mathrm{X}\,T_n'(\mathrm{X}) + n^2T_n = 0$.

Troisième partie

1. On se donne P dans $\mathbb{R}_n[X]$, de monôme dominant λX^n, avec $n \geq 1$.

   Par l'absurde, on suppose que $\sup\{|P(x)|,\ x \in [-1,1]\} < \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$.

   On considère alors le polynôme $Q = 2^{n-1}P - \lambda T_n$, visiblement dans $\mathbb{R}_n[X]$.

   En fait $\deg Q \leqslant n-1$ car $2^{n-1}P$ et λT_n ont deux $2^{n-1}\lambda X^n$ pour terme dominant.

   Rappelons que si $x'_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$), on a $T_n(x'_k) = (-1)^k$.

   Cette égalité est encore vraie si $k = 0$ car alors $x'_0 = 1$ et on sait que $T_n(0) = 1$.

   Elle est encore vraie si $k = n$ donc $x'_n = -1$ car $T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n$.

   Ainsi on a $T_n(x'_k) = (-1)^k$ pour tout k de $\{0,\dots,n\}$, avec $x'_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$.

   On a alors $Q(x'_k) = 2^{n-1}\Big(P(x'_k) - \dfrac{\lambda}{2^{n-1}}(-1)^k\Big)$.

   Or on sait que $|P(x'_k)| < \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$ pour tout k.

   Il en résulte que les quantités $Q(x'_k)$ sont alternativement strictement positives et strictement négatives. En particulier le polynôme Q s'annule au moins une fois sur chacun des n intervalles $]x'_{k+1}, x'_k[$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   Mais $\deg Q < n$, et on vient de trouve au moins n racines distinctes pour Q.

   La seule possibilité est donc $Q = 0$, c'est-à-dire $P = \dfrac{\lambda}{2^{n-1}}T_n$.

   Mais c'est absurde car cela donne $\sup\{|P(x)|,\ x \in [-1,1]\} = \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$.

   Conclusion : avec les hypothèses de départ, on a $\sup\{|P(x)|,\ x \in [-1,1]\} \geqslant \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$.

   Remarque : on peut choisir $P = T_n$, auquel cas $\lambda = 2^{n-1}$. Dans ce cas, on voit que l'inégalité précédente est en fait une égalité. On peut prouver que cette égalité caractérise le polynôme de Chebyshev T_n parmi tous les polynômes de degré n.

2. On se place cette fois-ci sur $[a,b]$, avec $a < b$.

   On définit un polynôme R de degré n par $R(x) = P(t)$, avec $t = \dfrac{a+b}{2} + x\dfrac{b-a}{2}$.

   (on voit bien que quand x parcourt $[-1,1]$, t parcourt $[a,b]$).

   R est un polynôme de degré n et dont le terme dominant est $\mu = \lambda\Big(\dfrac{b-a}{2}\Big)^n$.

   D'après (III.1) on a $\sup\{|R(x)|,\ x \in [-1,1]\} \geqslant \dfrac{|\mu|}{2^{n-1}}$.

   Mais $\sup\{|R(x)|,\ x \in [-1,1]\} = \sup\{|P(t)|,\ t \in [a,b]\}$.

   On a donc finalement obtenu l'inégalité $\sup\{|P(t)|,\ a \leq t \leq b\} \geq \Big(\dfrac{b-a}{2}\Big)^n \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$.