Simulation DS

Polynômes

Fractions Rationnelles

Mercredi 7 Mars 2018 (2 heures)

Niveau 1 (5 points) : Question de Cours & Exercices d'application

1. Compléter les assertions suivantes :
   - i. $\deg(PQ)\ldots$;
   - ii. $\deg(P+Q)\ldots$;
2. Rappeler le théorème de la division euclidienne
3. Donner le reste de la division euclidienne de X^n par :
   - i. $X-1$;
   - ii. X^2-1 ;
   - iii. $(X-1)^2$;
   - iv. X^2+1.
4. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$, puis intégrer la fraction rationnelle suivante :

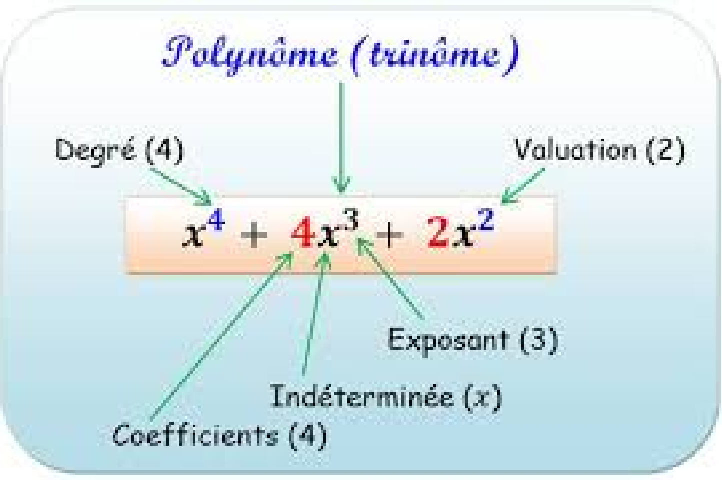
$$F(X)=\frac{2X+1}{X^2(X+1)}.$$

Niveau 2 (10 points) : Primitives d'une fraction rationnelle

On considère la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{X}{(X+1)(X^2+1)}$.

1. Décomposez F en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$.

2. Déterminez les primitives de $t\mapsto F(t)=\dfrac{t}{(t+1)(t^2+1)}$ en précisant les intervalles de validité.



Niveau 3-4 (15 points) : Problème

Etude d'une famille de polynômes

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ un entier naturel non nul, on définit le polynôme $P_n \in \mathbf{C}[X]$ par :

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right]$$

Notation : *On note, pour* $x \not\equiv 0\,[\pi]$, $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Partie I. Décomposition primaire de P_n

1. Déterminez le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant a_n.

2. À l'aide du changement d'inconnue $w = \frac{z+i}{z-i}$, résolvez l'équation polynomiale

$$\tilde{P}_n(z) = 0 \tag{1}$$

Déduisez-en que P_n se décompose en produit de facteurs irréductibles sous la forme :

$$P_n(X) = a_n \prod_{k=1}^{2n}\left(X - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

Remarque : P_n est donc en fait un polynôme coefficients réels.

3. Observez que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right) = -\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$. Déduisez-en l'existence d'un polynôme $Q_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$, dont vous donnerez une décomposition en produit de facteurs irréductibles.

Partie II. Application au calcul de la somme d'une série

1. Calculez les sommes $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

Indication : pour la deuxième somme, vous pourrez établir une relation simple entre $\operatorname{cotan}^2(x)$ et $\dfrac{1}{\sin^2(x)}$.

2. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, démontrez que $0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ et déduisez-en l'encadrement

$$\operatorname{cotan}^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$$

3. Déduisez de ce qui précède la valeur de $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Corrigé

Niveau 2 (10 points) : Primitives d'une fraction rationnelle

Niveau 3-4 (15 points) : Problème

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ un entier naturel non nul, on définit le polynôme $P_n \in \mathbf{C}[X]$ par :

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right]$$

Notation : *On note, pour* $x \not\equiv 0\,[\pi]$, $\operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Partie I. Décomposition primaire de P_n

1. D'après la **formule du binôme**, nous avons

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{2i}\times & (X+i)^{2n+1} = X^{2n+1} + i(2n+1)X^{2n} + \text{termes de degrés inférieurs} \\ \frac{-1}{2i}\times & (X-i)^{2n+1} = X^{2n+1} - i(2n+1)X^{2n} + \text{termes de degrés inférieurs} \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$P_n = (2n+1)X^{2n} + \text{termes de degrés inférieurs}$$

En particulier, P_n est un polynôme de degré $2n$ et son coefficient dominant est $a_n = 2n+1$. ▲

2. Déterminons la décomposition primaire de P_n dans $\mathbf{C}[X]$. Tout revient à déterminer les racines complexes de P_n, c'est-à-dire à résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbf{C}$

$$P_n(z) = 0 \qquad (2)$$

Soit $z \in \mathbf{C}$. Procédons par équivalences :

$$\begin{aligned} z \text{ sol } (2) &\iff (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0 \iff (z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1} \\ &\iff \begin{cases} z \neq i \\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq i \\ w = \dfrac{z+i}{z-i} \\ w^{2n+1} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Or les solutions complexes de l'équation $w^{2n+1} = 1$ sont les racines $2n+1^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{2n+1}}$ et pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, $\omega_k = \omega^k$, de sorte que

$$z \text{ sol } (2) \iff \begin{cases} z \neq i \\ w = \dfrac{z+i}{z-i} \\ \exists k \in [\![0,2n]\!],\ w = \omega_k \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq i \\ \exists k \in [\![0,2n]\!],\ \dfrac{z+i}{z-i} = \omega_k \end{cases}$$

Or pour tout nombre complexe de module 1, $\omega = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} = \omega \quad &\Longleftrightarrow \quad z+i = \omega(z-i) \Longleftrightarrow z(1-\omega) = -i(1+\omega) \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega \neq 1 \\ z = i\,\dfrac{\omega+1}{\omega-1} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega \neq 1 \\ z = i\,\dfrac{2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)}{2ie^{i\theta/2}\sin(\theta/2)} \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega \neq 1 \\ z = \operatorname{cotan}(\theta/2) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

En reportant dans (2), on obtient finalement (en notant au passage que $\omega_k = 1 \iff k = 0$)

$$\begin{aligned}
z \text{ sol } (2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z \neq i \\ \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ z = \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ z = \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, les racines complexes de P_n sont les nombres réels

$$\mathcal{S} = \left\{ \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right), \operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right), \ldots, \operatorname{cotan}\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right) \right\}$$

Finalement, d'après le **théorème de décomposition primaire dans $\mathbf{C}[X]$**, il vient

$$\boxed{P_n(X) = a_n \prod_{k=1}^{2n} \left(X - \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1} \right)}$$

Remarque : P_n est donc en fait un polynôme coefficients réels.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\operatorname{cotan}\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} = \frac{\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right)} = -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = -\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}$$

D'après la question précédente, on a donc à l'aide du changement d'indice $k \leftrightarrow 2n+1-k$

dans le deuxième produit fini,

$$\begin{aligned}
P_n &= a_n \prod_{k=1}^{2n}\left(X - \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\
&= a_n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n}\left(X - \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\
&= a_n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}\right) \times \prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)\\
&= a_n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}\right) \times \prod_{k=1}^{n}\left(X + \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\
&= a_n \prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Définissons alors le polynôme Q_n par

$$\boxed{Q_n(X) = a_n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Il est clair que $Q_n \in \mathbf{R}[X]$ et que $P_n(X) = Q_n(X^2)$. ▲

Partie II. Application au calcul de la somme d'une série

1. Calculons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

- **Calcul de S_n**

  On observe que S_n est la somme des racines de Q. Notons

  $$Q = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1Xx + a_0, \qquad \text{où } a_n = 2n+1.$$

  D'après les **relations** racines coefficients, on sait que

  $$S_n = \sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

  Pour conclure, il reste à calculer le coefficient a_{n-1}. Comme $P_n(X) = Q_n(X^2)$, il est clair (par idc) que a_{n-1} est le coefficient de X^{2n-2} dans le développement de P_n.
  A l'aide de la **formule du binôme**, nous pouvons identifier les monômes de degré $2n-2$ dans les polynômes $(X+i)^{2n+1}$ et $(X-i)^{2n+1}$, il s'agit repectivement de

  $$\begin{array}{r||l}
  \dfrac{1}{2i}\times & -i\dbinom{2n+1}{3}X^{2n-2}\\
  \dfrac{-1}{2i}\times & i\dbinom{2n+1}{3}X^{2n-2}
  \end{array}$$

Il en résulte que $a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}$, d'où je tire finalement

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{6\,(2n+1)} \\ &= \frac{n\,(2n-1)}{3} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n\,(2n-1)}{3}}$$

- **Calcul de T_n**
  Soit $x \in \mathbf{R}$, $x \not\equiv 0\,[\pi]$. On a

$$\operatorname{cotan}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}, x \not\equiv 0\,[\pi], \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotan}^2 x$$

Comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$; $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \pi$, nous pouvons appliquer cette identité au calcul de T_n, il vient :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \\ &= n + S_n \end{aligned}$$

En utilisant l'expression obtenue ci-dessus pour S_n, il vient :

$$\boxed{T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = n + \frac{n(2n-1)}{3} = 2\frac{n(n+1)}{3}}$$

▲

2. Par concavité de sin et convexité de tan sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, l'**inégalité des tangentes** , appliquée entre 0 et x donne

$$0 < \sin x \leq x \leq \tan x$$

Passons aux inverses et élevons au carré cet encadrement entre nombres réels strictement positifs. Il en découle que

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \operatorname{cotan}^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$$

▲

3. Ainsi que nous l'avons déjà observé, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$; $\dfrac{k\pi}{2n+1}$ est strictement compris entre 0 et π. Par conséquent, l'encadrement ci-dessus s'applique. On obtient :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$$

Sommons terme à terme ces encadrements, il en résulte que

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2 T_n}{(2n+1)^2}$$

Comme

- $\dfrac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} = \pi^2 \dfrac{2n^2 - n}{12n^2 + 12n + 3} \sim_{n\to\infty} \dfrac{\pi^2}{6}$
- $\dfrac{\pi^2 T_n}{(2n+1)^2} = \pi^2 \dfrac{2n^2 + 2n}{12n^2 + 12n + 3} \sim_{n\to\infty} \dfrac{\pi^2}{6}$

D'après le **théorème de convergence par encadrement**, il vient finalement que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente de limite $L = \dfrac{\pi^2}{6}$. ▲

Remarque : bientôt, nous dirons que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{k^2}$ est convergente de somme L, et on notera cette relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.