Devoir Maison 14

# Espaces Vectoriels

Mercredi 14 Mars 2018

## Supplémentaire commun à deux sous-espaces vectoriels

Soit $E$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On se donne $A$ et $B$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ et on se pose le problème suivant :
A quelle(s) condition(s) existe-t-il un sous-espace vectoriel $C$ tel que : $A+B=A\oplus C=B\oplus C$.

1. Dans cette question on suppose que le sous-espace vectoriel $C$ existe.
Montrer que $\dim A=\dim B$ et déterminer $\dim C$.

Dans la suite de notre étude, nous allons supposer $\dim A=\dim B$ et montrer que le sous-espace vectoriel $C$ existe.

2. On étudie pour commencer le cas où $A$ et $B$ seraient deux hyperplans distincts.

2.a Justifier l'existence de vecteurs $\vec{u}\in A$ et $\vec{v}\in B$ tels que $\vec{u}\notin B$ et $\vec{v}\notin A$.

2.b Etablir que $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\notin A\cup B$.

2.c Observer que $C=\text{Vect}(\vec{w})$ est solution du problème posé.

3. On revient au cas général et on suppose seulement $\dim A=\dim B$

3.a Résoudre le problème posé lorsque $A=B$
Dans la suite, on suppose $A\neq B$.

3.b Justifier qu'il existe un sous-espace vectoriel $A'$ tel que $(A\cap B)\oplus A'=A$.
De manière symétrique, on introduit $B'$ sous-espace vectoriel tel que $(A\cap B)\oplus B'=B$.

3.c Montrer que $A'\cap B'=\{\vec{o}\}$ et $\dim A'=\dim B'\in\mathbb{N}^*$.
Dans la suite, on pose $p=\dim A'=\dim B'$.

3.d Justifier l'existence de bases $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ et $\mathcal{C}=(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p)$ aux sous-espaces vectoriels $A'$ et $B'$.

4. On reprend les objets introduits ci-dessus afin de construire un sous-espace vectoriel $C$ solution.
On forme $\mathcal{D}=(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_p)$ en posant, pour tout $i\in\{1,\dots,p\}$, $\vec{g}_i=\vec{e}_i+\vec{f}_i$.

4.a Montrer que la famille $\mathcal{D}$ est libre.

4.b On pose $C=\text{Vect}(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_p)$.
Déterminer $\dim C$.

4.c Montrer que $A\cap C=\{\vec{o}\}$.

4.d Conclure que $A+B=A\oplus C=B\oplus C$.

# Corrigé

1. $A\oplus C=B\oplus C$ donc $\dim A\oplus C=\dim B\oplus C$ d'où et $\dim A+\dim C=\dim B+\dim C$ puis $\dim A=\dim B$. De plus $A\oplus C=A+B$ donc $\dim A+\dim C=\dim A+\dim B-\dim A\cap B$ et par suite $\dim C=\dim B-\dim A\cap B=\dim A-\dim A\cap B$.

2.a Puisque $A\neq B$ et $\dim A=\dim B$ on a nécessairement $A\not\subset B$ (car inclusion et égalité des dimensions impliquent égalité des espaces). Par suite $\exists\vec{u}\in A$ tel que $\vec{u}\notin B$. De même pour $\vec{v}$.

2.b Si $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\in A$ alors $\vec{v}=\vec{w}-\vec{u}\in A$ par opérations sur les vecteurs de $A$.
Par contraposée : $\vec{v}\notin A\Rightarrow\vec{w}\notin A$. De même $\vec{w}\notin B$ et donc $\vec{w}\notin A\bigcup B$.

2.c Soit $\vec{x}\in A\cap C$. Il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\vec{x}=\lambda.\vec{w}$ et $\vec{x}\in A$

Si $\lambda\neq 0$ alors $\vec{w}=\dfrac{1}{\lambda}.\vec{x}\in A$ ce qui est exclu.

Nécessairement $\lambda=0$ et $\vec{x}=\vec{o}$. Ainsi $A$ et $C$ sont en somme directe.
$\dim A\oplus C=\dim A+\dim C=(n-1)+1=n=\dim E$ et donc $A\oplus C=E$
Or $A\subset A+B$, $C\subset A+B$ (car $\vec{w}\in A+B$) donc $E=A\oplus C\subset A+B$.
Par suite $A\oplus C=A+B=E$. De même $B\oplus C=A+B$.

3.a Si $A=B$ alors $A+B=A=B$. $C=\{\vec{o}\}$ résout le problème posé.

3.b $A\cap B$ est un sous-espace vectoriel de $A$ qui est un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Par suite $A\cap B$ possède un supplémentaire $A'$ dans $A$.

3.c $A'\cap B'\subset A\cap B$ car $A'\subset A$ et $B'\subset B$.
Or $A'\cap(A\cap B)=\{\vec{o}\}$ car $A'\oplus(A\cap B)$ donc $A'\cap B'=\{\vec{o}\}$.
$\dim A=\dim A'+\dim A\cap B$ et $\dim B=\dim B'+\dim A\cap B$.
Puisque $\dim A=\dim B$ on a $\dim A'=\dim B'$.
De plus $A',B'\neq\{\vec{o}\}$ (car sinon on aurait $A=B$) donc $\dim A'=\dim B'=p\in\mathbb{N}*$.

3.d $A'$ et $B'$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie $p\in\mathbb{N}*$ donc possède des bases de la forme annoncée.

4.a Supposons $\lambda_1\vec{g}_1+\cdots+\lambda_p\vec{g}_p=\vec{o}$.
On a $\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_p\vec{e}_p=-(\lambda_1\vec{f}_1+\cdots+\lambda_p\vec{f}_p)$ or $\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_p\vec{e}_p\in A'$ et $\lambda_1\vec{f}_1+\cdots+\lambda_p\vec{f}_p\in B'$ avec $A'\cap B'=\{\vec{o}\}$ donc $\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_p\vec{e}_p=\lambda_1\vec{f}_1+\cdots+\lambda_p\vec{f}_p=\vec{o}$.
Puisque la famille $\mathcal{B}$ est libre, on a $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$ donc $\mathcal{D}$ est libre.

4.b La famille $\mathcal{D}$ est une famille libre et génératrice de $C$, c'est donc une base de $C$.
Puisqu'elle est formée de $p$ vecteurs on a : $\dim C=p$.

4.c Soit $\vec{x}\in A\cap C$.
$\vec{x}\in C$ donc on peut écrire $\vec{x}=\lambda_1\vec{g}_1+\cdots+\lambda_p\vec{g}_p=\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{u}=\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_p\vec{e}_p\in A'$ et $\vec{v}=\lambda_1\vec{f}_1+\cdots+\lambda_p\vec{f}_p\in B'$.
On a alors $\vec{v}=\vec{x}-\vec{u}\in A$ car $\vec{x}\in A$ et $\vec{u}\in A'\subset A$. Mais $\vec{v}\in B'\subset B$ donc $\vec{v}\in A\cap B$.
Or $\vec{v}\in B'$ et $(A\cap B)\cap B'=\{\vec{o}\}$ donc $\vec{v}=\vec{o}$.
Puisque $\mathcal{C}$ est une base, on a $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$ et par suite $\vec{u}=\vec{o}$ et donc $\vec{x}=\vec{o}$.

4.d $A\subset A+B$ et $C\subset A+B$ donc $A+C\subset A+B$.
De plus $\dim A\oplus C=\dim A+\dim C=\dim A+p=\dim A+\dim B-\dim A\cap B=\dim A+B$ donc $A\oplus C=A+B$.
De manière symétrique $A+B=B\oplus C$.