

Devoir Maison 14

## Espaces Vectoriels

Mercredi 14 Mars 2018

### Suite de Fibonacci

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ .

Cette suite est appelée suite de Fibonacci.

#### Partie I

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n - 1$ . Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
- 2.a Etablir que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$  (appelée relation de Simson).
- 2.b En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  et  $u_{n-1}$  sont premiers entre eux.
- 3.a Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p$ .
- 3.b En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(u_{n+p}, u_p) = \text{pgcd}(u_n, u_p)$ .
- 3.c Montrer que si  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a \in \mathbb{N}$  par  $b \in \mathbb{N}^*$  alors  $\text{pgcd}(u_a, u_b) = \text{pgcd}(u_b, u_r)$ .
- 3.d En s'inspirant de l'algorithme d'Euclide, établir  $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(u_n, u_p) = u_{\text{pgcd}(n,p)}$ .

#### Partie II

On note  $E$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  formé des suites réelles  $(a_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
2. On considère l'application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\varphi((a_n)) = (a_0, a_1)$ .  
Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.  
En déduire  $\dim E$ .
- 3.a Pour quels  $q \in \mathbb{R}$  les suites  $(q^n)$  appartiennent-elles à  $E$ ?  
On notera  $q_1$  et  $q_2$  les deux solutions trouvées.
- 3.b Montrer que les suites  $(q_1^n)$  et  $(q_2^n)$  forment une base de  $E$ .
- 3.c En déduire l'expression du terme général de la suite de Fibonacci.

## Corrigé

1. Par récurrence double sur  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Pour  $n = 0, u_0 = 0 \geq -1$ , pour  $n = 1, u_1 = 1 \geq 0$ , pour  $n = 2, u_2 = 1 \geq 1$  et pour  $n = 3, u_3 = 2 \geq 2$ .  
 Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 2$  et  $n + 1$  :  

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \underset{HR}{\geq} n + (n-1) = 2n - 1 = n + (n-1) \geq n + 1$$
 puisque  $n \geq 2$ .  
 Récurrence établie. Clairement  $u_n \rightarrow +\infty$ .
- 2.a Par récurrence simple sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
 Pour  $n = 1, u_2 u_0 - u_1^2 = -1$  : ok  
 Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 1$ .  

$$u_{n+2} u_n - u_{n+1}^2 = (u_{n+1} + u_n) u_n - u_{n+1} (u_n + u_{n-1}) = u_n^2 - u_{n+1} u_{n-1} \underset{HR}{=} -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$
  
 Récurrence établie
- 2.b Pour  $U = (-1)^n u_{n+1}$  et  $V = (-1)^{n+1} u_n$  on a :  
 $u_{n-1} U + u_n V = 1$  et par cette égalité de Bézout :  $u_{n-1} \wedge u_n = 1$ .
- 3.a Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Pour  $n = 0$  on a  $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_p = u_0 u_{p-1} + u_1 u_p$  car  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$ .  
 Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 0$ .  
 $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{n+1+p} = u_{n+(p+1)} = u_n u_p + u_{n+1} u_{p+1}$  donc  

$$u_{n+1+p} - (u_{n+1} u_{p-1} + u_{n+2} u_p) = (u_n - u_{n+2}) u_p + u_{n+1} (u_{p+1} - u_{p-1}) = -u_{n+1} u_p + u_{n+1} u_p = 0$$
  
 Récurrence établie.
- 3.b Posons  $d = \text{pgcd}(u_{n+p}, u_p)$  et  $\delta = \text{pgcd}(u_n, u_p)$ .  
 On a  $\delta | u_n$  et  $\delta | u_p$  donc  $\delta | u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p$ .  
 Ainsi  $\delta | u_p$  et  $\delta | u_{n+p}$  donc  $\delta | d$ .  
 Inversement, on a  $d | u_p$  et  $d | u_{n+p}$  donc  $d | u_n u_{p-1} = u_{n+p} - u_{n+1} u_p$ .  
 Or  $d | u_p$  et  $u_p \wedge u_{p-1} = 1$  donc  $d \wedge u_{p-1} = 1$ .  
 Puisque  $d | u_n u_{p-1}$  et  $d \wedge u_{p-1} = 1$  on a  $d | u_n$ .  
 Ainsi  $d | u_n$  et  $d | u_p$  donc  $d | \delta$ .  
 Par double divisibilité :  $d = \delta$ .
- 3.c  $\text{pgcd}(u_{n+2p}, u_p) = \text{pgcd}(u_{(n+p)+p}, u_p) = \text{pgcd}(u_{n+p}, u_p) = \text{pgcd}(u_n, u_p)$   
 Par récurrence, on obtient que  $\forall q \in \mathbb{N}, \text{pgcd}(u_{n+qp}, u_p) = \text{pgcd}(u_n, u_p)$ .  
 Ainsi, si  $r$  est le reste de la division euclidienne d'un entier  $a \in \mathbb{N}$  par un entier  $b \in \mathbb{N}^*$  on a :  
 $\text{pgcd}(u_a, u_b) = \text{pgcd}(u_b, u_r)$  (en prenant  $n = r$ ,  $b = p$  et  $a = qb + r$  ; sachant  $q \in \mathbb{N}$ ).
- 3.d Suivons l'algorithme d'Euclide calculant  $n \wedge p$  :  
 On pose  $a_0 = n$ ,  $a_1 = p$ , puis on réalise les divisions euclidiennes suivantes tant que les restes obtenus sont non nuls :  
 $a_0 = a_1 q_1 + a_2, a_1 = a_2 q_2 + a_3, \dots, a_{m-2} = a_{m-1} q_{m-1} + a_m$  puis  $a_{m-1} = a_m q_m + 0$  avec  $a_m = \text{pgcd}(n, p)$ .  
 Or, de part 3.c, on obtient  
 $\text{pgcd}(u_n, u_p) = \text{pgcd}(u_{a_0}, u_{a_1}) = \text{pgcd}(u_{a_1}, u_{a_2}) = \dots = \text{pgcd}(u_{a_m}, u_0) = \text{pgcd}(u_{a_m}, 0) = u_{a_m}$ ,  
 d'où le résultat voulu.

### Partie II

1.  $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  
 La suite nulle (0) vérifie la relation de récurrence et appartient donc à  $E$ .

Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $(a_n), (b_n) \in E$ .

$$\alpha.(a_n) + \beta.(b_n) = (\alpha a_n + \beta b_n) \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha a_{n+2} + \beta b_{n+2} = \alpha(a_{n+1} + a_n) + \beta(b_{n+1} + b_n) = (\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1}) + (\alpha a_n + \beta b_n)$$

donc  $\alpha.(a_n) + \beta.(b_n) \in E$ .

Ainsi  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

2. Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $(a_n), (b_n) \in E$ .

$$\varphi(\alpha.(a_n) + \beta.(b_n)) = (\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1) = \alpha \varphi((a_n)) + \beta \varphi((b_n))$$

donc  $\varphi$  est une application linéaire.

Soit  $(a_n) \in \ker \varphi$ .

On a  $a_0 = 0$  et  $a_1 = 0$ .

Par récurrence double, on montre  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$  puisque  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .

Ainsi  $\ker \varphi = \{(0)\}$  et donc  $\varphi$  est injective.

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Pour  $(a_n)$  définie par  $a_0 = x, a_1 = y$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ , la suite  $(a_n)$  est bien définie, elle est élément de  $E$  et on a  $\varphi((a_n)) = (x, y)$ . Ainsi  $\varphi$  est surjective.

Finalement  $\varphi$  est bijective et c'est donc un isomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  - espace vectoriel.

Il en découle  $\dim E = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ .

3.a  $(q^n) \in E \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \Leftrightarrow q^2 = q + 1$

Les solutions de cette dernière équation sont  $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

3.b Les suites  $(q_1^n)$  et  $(q_2^n)$  sont éléments de  $E$ .

Montrons qu'elles forment une famille libre.

Supposons  $\alpha(q_1^n) + \beta(q_2^n) = (0)$  i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha q_1^n + \beta q_2^n = 0$ .

Pour  $n = 0$ , on obtient  $\alpha + \beta = 0$  d'où  $\beta = -\alpha$

Pour  $n = 1$ , on obtient  $\alpha q_1 + \beta q_2 = 0$  ce qui donne  $\alpha(q_1 - q_2) = 0$ .

Puisque  $q_1 \neq q_2$ , on conclut  $\alpha = 0$  puis  $\beta = 0$ .

La famille  $((q_1^n), (q_2^n))$  est une famille libre formée de  $2 = \dim E$  éléments de  $E$ , c'est donc une base de  $E$ .

3.c Puisque  $(u_n) \in E : \exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (u_n) = \alpha.(q_1^n) + \beta.(q_2^n)$  i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha.q_1^n + \beta.q_2^n$ .

Pour  $n = 0$ , on obtient  $\alpha + \beta = 0$  d'où  $\beta = -\alpha$ .

Pour  $n = 1$ , on obtient  $\alpha q_1 + \beta q_2 = 1$  d'où  $\alpha = \frac{1}{q_1 - q_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$ .