

Intégration généralisée

Devoir Maison N° 17 bis

Vendredi 11 Mai 2018

Calcul de l'intégrale de Gauss

L'objectif de ce problème est de calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-x^2} dx$.

1. Montrer que la fonction $X \mapsto \int_0^X e^{-x^2} dx$ est croissante et majorée.
En déduire l'existence de la limite définissant I .
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.
 - 2.a Calculer a_0 et a_1 .
 - 2.b Démontrer l'inégalité stricte : $0 < a_{n+1} < a_n$.
 - 2.c En supposant $n \geq 2$, former une relation de récurrence liant a_n et a_{n-2} .
 - 2.d Montrer que, si $n \geq 1$, on a l'égalité : $na_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
 - 2.e On suppose toujours $n \geq 1$.
A l'aide de l'encadrement : $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$ déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.
 - 2.f A l'aide des résultats précédents, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et déterminer un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Soit x élément de $] -1, +\infty[$. On pose $h(x) = x - \ln(1+x)$.
Etudier les variations de h sur $] -1, +\infty[$.
Quelle inégalité en déduit-on ?
4. On pose, n désignant un entier strictement positif :

$$b_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) dx \quad \text{et} \quad c_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}.$$
 - 4.a Réaliser le changement de variable $x = \sqrt{n} \tan t$ sur $\int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$ et en déduire l'existence de la limite définissant c_n .
 - 4.b En employant, notamment, l'inégalité trouvée dans la question 3, démontrer la double inégalité :

$$b_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq c_n.$$
 - 4.c A l'aide de changements de variable convenablement choisis, exprimer b_n et c_n à l'aide des intégrales a_{2n+1} et a_{2n-2} .
5. A l'aide des résultats précédents, déterminer la valeur de I .

Correction

d'après ENAC Pilotes 1989

1. $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est une fonction continue positive donc $F : X \rightarrow \int_0^X e^{-t^2} dt$ est croissante.
- Pour $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ donc $F(X) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^X e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + 1 - e^{-X} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + 1$.
- Ainsi la fonction F est majorée. Par suite F converge en $+\infty$.
- 2.a $a_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ et $a_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$.
- 2.b $x \mapsto \cos^{n+1} x$ est continue, positive sans être la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$ donc $a_{n+1} > 0$.
- $x \mapsto \cos^n x - \cos^{n+1} x = \cos^n x(1 - \cos x)$ est aussi continue, positive sans être la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$ donc $a_n > a_{n+1}$.
- 2.c $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos^{n-2} x dx = a_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{n-2} x dx$
- donc $a_n = a_{n-2} + \left[\frac{1}{n-1} \sin x \cos^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = a_{n-2} - \frac{1}{n-1} a_n$
- d'où la relation $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$.
- 2.d Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
- Pour $n=1$: $n a_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
- Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$:
- $(n+1) a_{n+1} a_n = n a_{n-1} a_n = \frac{\pi}{2}$.
- Récurrence établie.
- 2.e $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$ donne $\frac{n}{n+1} a_{n-1} < a_n < a_{n-1}$ puis $\frac{n}{n+1} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.
- 2.f Le résultat ci-dessus donne $a_{n-1} \sim a_n$ et la relation $n a_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ conduit à $n a_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ d'où $a_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$.
- Il en découle $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
3. h est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ d'où :
- | | | | |
|--------|-----------|--------|----------------|
| x | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $h(x)$ | $+\infty$ | ↘
0 | ↗
$+\infty$ |
- Il en découle : $\forall x \in] -1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
- 4.a La fonction $X \mapsto \int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$ est évidemment croissante de part la positivité de la fonction intégrée.
- Le changement de variable proposé donne $\int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = \int_0^{\arctan \frac{X}{\sqrt{n}}} \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)^{n-1}}$.

On en déduit $\int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} \leq \frac{\pi}{2}$.

La fonction $X \mapsto \int_0^X \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$ étant croissante et majorée, elle converge en $+\infty$ et c_n existe.

4.b $\forall x \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \leq e^{-x^2}$ car $-\frac{x^2}{n} \in]-1, 0]$ donc $\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$.

Par suite : $b_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.

$\forall x \in [0, \sqrt{n}], \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)} \geq e^{-x^2}$ car $\frac{x^2}{n} \geq 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \leq \frac{x^2}{n}$.

Par suite $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$.

4.c Pour réexprimer b_n , réalisons le changement de variable : $x = \sqrt{n} \sin t$:

$$b_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n} \cos t (1 - \sin^2 t)^n dt = \sqrt{n} a_{2n+1}.$$

Pour réexprimer c_n , réalisons le changement de variable : $x = \sqrt{n} \tan t$:

$$c_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n} (1 + \tan^2 t) \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)^n} = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)^{n-1}} = \sqrt{n} a_{2n-2} \text{ car } \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t.$$

5. $b_n = \sqrt{n} a_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $c_n = \sqrt{n} a_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

L'encadrement de 4.b donne à la limite : $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Finalement voilà la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

