Séries Numériques

Devoir Maison N° 18 Bis

Lundi 4 Juin 2018

Concours National Commun – Session 2016 – Filière PSI

Partie I
Convergence des séries par transformation d'Abel

On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

1. **a)** Pour tout entier $k \geq 1$, déterminer b_k en fonction de B_k et B_{k-1}.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$, (on remarque que $B_0 = b_0$).

2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n - a_{n+1})$ converge.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

Partie II
Applications aux convergences de quelques types de séries

1. Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

2. Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et α un réel.

a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

b) Montrer que, pour tout $\alpha \leq 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est divergente.

c) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont convergentes.

d) Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont absolument convergentes.

e) On suppose que $0 < \alpha \leq 1$.

i) Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(2n\theta)}{n^\alpha}$ est convergente.

ii) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ est divergente.

iii) En déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ n'est pas absolument convergente.

3. Soit (c_n) une suite de nombres complexes telles que la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ est convergente. Montrer que, pour tout réel α positif, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ est convergente.

Partie I
Convergence des séries par transformation d'Abel

1. **(a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $B_k = \sum_{j=0}^{n} bj = \sum_{j=0}^{n-1} bj + b_k = B_{k-1} + b_k$, donc $b_k = B_k - B_{k-1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= a_0 b_0 + a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= a_0 b_0 + a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j \quad \text{on a effectué le changement d'indice } j = k-1 \\
&= a_n B_n + a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \quad \text{car } B_0 = b_0 \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.
\end{aligned}$$

2. **(a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_0$, donc [2] la série $\sum_{n\geq 0} (a_n - a_{n+1})$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0$.

1. Ce corrigé est proposé par Adham Elbekkali, professeur de mathématiques de la classe PCSI 2 au CPGE de Tanger

2. Définition : Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que la série $\sum u_n$ est convergente, si la suite (S_n) des sommes partielles, définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

est convergente. Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(b) Pour monter que la série $\sum_{n\geq 0} a_nb_n$ est convergente, alors, par définition de la convergence d'une série, il suffit qu'on montre que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente. Or, d'après la question **I.1.b**, on a

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=a_nB_n+\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k,$$

alors il suffit qu'on montre que les suites (a_nB_n) et $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right)$ sont convergentes.

On a

- On a $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la suite (B_n) est bornée, donc $a_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ainsi la suite (a_nB_n) est convergente.
- La suite (B_n) est bornée, donc $B_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$, par suite $(a_n-a_{n+1})B_n \underset{n\to+\infty}{=} O(a_n-a_{n+1})$ et comme la série $\sum_{n\geq 0}(a_n-a_{n+1})$ est convergente d'après **I.2.b**, alors la série $\sum_{n\geq 0}(a_n-a_{n+1})B_n$ est aussi convergente, du coup la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right)$ est convergente.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} a_nb_n$ est convergente.

Partie II
Applications aux convergences de quelques types de séries

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $b_n=(-1)^n$ et $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k=\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}\in\{0,1\}$, du coup la suite (B_n) est bornée, et comme la suite (a_n) est décroissante de limite nulle, alors, d'après la question **I.2.b**, la série $\sum_{n\geq 0}a_nb_n=\sum_{n\geq 0}(-1)^na_n$ est convergente.

2. **(a)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a θ est différent de $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, donc $\mathrm{e}^{i\theta}$ est différent de 1 puis

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}=\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k=\mathrm{e}^{i\theta}\times\frac{1-\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{i\theta}\times\frac{1-\mathrm{e}^{in\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}\theta}\times\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

(b) Soit $\alpha\leq 0$, on a $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right|=\dfrac{1}{n^\alpha}\ \not\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ 0$, donc $\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\ \not\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ 0$, dès lors la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

(c) Soit $\alpha>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $a_n=\dfrac{1}{n^\alpha}$, $b_n=\mathrm{e}^{in\theta}$ et $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$. D'après la question **I.2.a**, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |B_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}\right|=\left|\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}\theta}\times\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|},$$

donc la suite (B_n) est bornée, et comme la suite (a_n) est décroissante de limite nulle, alors, d'après la question **I.2.b**, la série $\sum_{n\geq 1}a_nB_n=\sum_{n\geq 1}\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente. Il en résulte que les séries $\sum_{n\geq 1}\mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right)=\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1}\mathrm{Im}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right)=\sum_{n\geq 1}\dfrac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont aussi convergentes.

(d) Soit $\alpha > 1$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

et, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, alors les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right|$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}\right|$ sont convergentes et par suite les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont absolument convergentes.

(e) (i) On a θ est différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), donc 2θ est aussi différent de $2k\pi$ et, comme $\alpha > 0$, alors, d'après la question **II.2.c**, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n2\theta)}{n^\alpha}$ est convergente.

(ii) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha} = \frac{1-\cos(2n\theta)}{2n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\cos(2n\theta)}{2n^\alpha},$$

la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente ($\alpha < 1$) et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(2n\theta)}{n^\alpha}$ est convergente d'après la question précédente, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ est divergente en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $|\sin(n\theta)| \geq \sin^2(n\theta)$, donc $\frac{|\sin(n\theta)|}{n^\alpha} \geq \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ et, comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ est divergente d'après la question précédente, alors la série $\sum\limits_{n\leq 1} \frac{|\sin(n\theta)|}{n^\alpha}$ est aussi divergente, ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ n'est pas absolument convergente.

3. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. La série $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ étant convergente, donc la suite des sommes partielles $(B_n)_{n\geq 1}$ est convergente et par conséquent elle est bornée et, comme la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle, alors, d'après la question **I.2.b**, la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n c_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ est convergente.

FIN