

Espaces Préhilbertiens

Devoir Maison N° 19

Lundi 11 Juin 2018

Polynômes de Legendre

d'après ESIEE Amiens 1997

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réel en l'indéterminée X et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal n .

On identifiera polynôme et fonctions polynomiales associées définies sur $[-1,1]$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\frac{d^k P}{dx^k}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ d'un polynôme P .

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions polynomiales définies sur I par :

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n \text{ et } P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n U_n}{dx^n}(x)$$

En particulier, avec les conventions usuelles : $U_0(x) = P_0(x) = 1$.

A toute fonction polynomiale P , on associe le polynôme $L(P)$ définie sur I par :

$$L(P)(x) = \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{dP}{dx}(x) \right)$$

Partie I

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans tout le problème, on suppose $\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

2. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3. On note L_n la restriction de l'endomorphisme L au départ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a Montrer que L_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.b Calculer $L_n(1)$, $L_n(X)$ et $L_n(X^k)$ pour tout $2 \leq k \leq n$.

3.c Former la matrice de L_n relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Observer que $(L(P)|Q) = (P|L(Q))$.

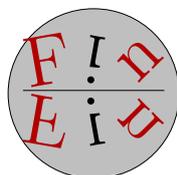
Partie II

- 1.a Calculer directement P_1, P_2 et P_3 .
- 1.b Montrer que P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient a_n de x^n dans P_n .
- 1.c Justifier que P_0, P_1, \dots, P_n forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer : $\frac{d^n}{dx^n}((x-1)^n(x+1)^n)$, établir que :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k$$

et en déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

- 3.a Vérifier les relations :
- (1) : $U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0$,
- (2) : $(x^2 - 1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0$.
- 3.b En dérivant $n+1$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie :
- (3) : $P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$,
- (4) : $L(P_n) = n(n+1)P_n$.
- 3.c En exploitant la relation (4) et le résultat de la question I.4, établir que si $m \neq n$, $(P_n | P_m) = 0$.
- 4.a Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P_{n+1} | Q) = 0$.
- 4.b En introduisant un polynôme Q de la forme $\prod_{i=1}^p (X - a_i)$ montrer que le polynôme P_{n+1} possède exactement $n+1$ racines distinctes, toute dans l'intervalle $] -1, 1[$.
- 5.a Montrer que $(P'_{n+1} | P_n) = (n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \|P_n\|^2$.
- 5.b A l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\|P_n\|^2 = 2 - 2 \int_{-1}^1 x P_n(x) P'_n(x) dx$.
- 5.c En déduire que $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.
6. Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on note $d(P, F)$ la distance de P au sous-espace vectoriel F .
Calculer $d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X])$.





Partie I

1. $(\cdot | \cdot)$ est clairement un forme bilinéaire symétrique.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P | P) = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0$ et si $(P | P) = 0$ alors la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est nulle car continue, positive et d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$. Par suite P est le polynôme nul car il possède une infinité de racines.

2. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. $L(\lambda P + \mu Q) = \lambda L(P) + \mu L(Q)$ notamment par linéarité de la dérivation. De plus $L: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ donc L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- 3.a La linéarité de L_n provient de celle de L . Le problème est de justifier que L_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg \frac{dP}{dx} \leq \deg P - 1 \leq n - 1$ donc $\deg \left((x^2 - 1) \frac{dP}{dx}(x) \right) \leq 2 + n - 1 = n + 1$ puis $\deg L_n(P) \leq n$. Ainsi $L_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

- 3.b $L_n(1) = 0$, $L_n(X) = (X^2 - 1)' = 2X$, $L_n(X^p) = (p(X^2 - 1)X^{p-1})' = p(p+1)X^p - p(p-1)X^{p-2}$.

3.c
$$\text{Mat}_{(1, X, \dots, X^n)} L_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & \mathbf{0} \\ & 2 & 0 & \ddots & \\ & & 6 & \ddots & n(n-1) \\ & & & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & & & & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

4.
$$(L(P) | Q) = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{dP}{dx}(x) \right) Q(x) dx \stackrel{\text{ipp}}{=} \left[(x^2 - 1) \frac{dP}{dx}(x) Q(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \frac{dP}{dx}(x) \frac{dQ}{dx}(x) dx$$

donc $(L(P) | Q) = - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \frac{dP}{dx}(x) \frac{dQ}{dx}(x) dx$

or la symétrie de cette formule en P et Q permet de conclure $(L(P) | Q) = (P | L(Q))$.

Partie II

1.a $P_1 = X$, $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

1.b $\deg U_n = 2n$ donc $\deg P_n = \deg U_n - n = n$.

Le terme en x^n de P_n provient de la dérivation à l'ordre n du terme $\frac{1}{2^n n!} x^{2n}$ donc $a_n = \frac{1}{2^n} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

- 1.c La famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est de degrés étagés (i.e. $\deg P_i = i$) c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.
$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((x-1)^n)^{(k)} ((x+1)^n)^{(n-k)} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (x+1)^k$$

donc
$$P_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k.$$

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n}^2 2^n = 1$$
 et
$$P_n(-1) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{0}^2 (-2)^n = (-1)^n.$$

3.a
$$\left((x^2 - 1)^{n+1} \right)' = (n+1) \times 2x \times (x^2 - 1)^n = 2(n+1)x U_n(x).$$

$$(x^2 - 1)((x^2 - 1)^n)' = n \times 2x \times (x^2 - 1)^n = 2nx U_n(x).$$

3.b En dérivant $n+1$ fois la relation (1), via la formule de Leibniz, on obtient :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (U_{n+1}(x)) \right) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (2(n+1)xU_n(x)) = 2(n+1) \binom{n+1}{0} x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (U_n(x)) + 2 \binom{n+1}{1} (n+1) \frac{d^n}{dx^n} (U_n(x))$$

$$\text{donc } 2^{n+1} (n+1)! P'_{n+1}(x) = 2(n+1)x2^n n! P'_n(x) + 2(n+1)^2 2^n n! P_n(x)$$

$$\text{puis } P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x).$$

En dérivant $n+1$ fois la relation (2), via la formule de Leibniz, on obtient :

$$(x^2 - 1)U_n^{(n+2)}(x) + (n+1)2xU_n^{(n+1)}(x) + \frac{n(n+1)}{2} 2U_n^{(n)}(x) - 2nxU_n^{(n+1)}(x) - 2n(n+1)U_n^{(n)}(x) = 0$$

$$\text{donc } (x^2 - 1)U_n^{(n+2)}(x) + 2xU_n^{(n+1)}(x) = n(n+1)U_n^{(n)}(x) \text{ i.e. } ((x^2 - 1)U_n^{(n+1)}(x))' = n(n+1)U_n^{(n)}(x)$$

$$\text{et donc } L(P_n) = n(n+1)P_n.$$

3.c $n(n+1)(P_n | P_m) = (L(P_n) | P_m) = (P_n | L(P_m)) = m(m+1)(P_n | P_m)$

$$\text{donc } (n(n+1) - m(m+1))(P_n | P_m) = 0.$$

Or $n \mapsto n(n+1)$ est injective et $n \neq m$ donc $n(n+1) \neq m(m+1)$ puis $(P_n | P_m) = 0$.

4.a (P_0, \dots, P_n) est base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc on peut écrire $Q = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n$.

$$\text{Par suite } (P_{n+1} | Q) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (P_{n+1} | P_k) = 0.$$

4.b Notons a_1, \dots, a_p les racines de multiplicités impaire du polynôme P_{n+1} appartenant à $] -1, 1[$.

$$\text{Posons } Q = \prod_{i=1}^p (X - a_i).$$

Le polynôme QP_{n+1} n'a que des racines de multiplicité paire dans $] -1, 1[$, il est donc de signe constant sur

$[-1, 1]$ et par suite $\int_{-1}^1 Q(x)P_{n+1}(x)dx \neq 0$ (par non nullité de l'intégrale d'une fonction continue, non nulle, et de signe constant). Par suite $p = \deg Q > n$.

Or P_{n+1} est de degré $n+1$ donc nécessairement $p \leq n+1$ et donc finalement $p = n+1$.

Par suite P_{n+1} possède $n+1$ racines distinctes dans $] -1, 1[$.

De plus, puisque $\deg P_{n+1} = n+1$, on peut assurer qu'il n'y en a pas d'autres et que celles-ci sont simples.

5.a $P'_{n+1} = (n+1)a_{n+1}X^n + Q$ avec $\deg Q < n$ ou encore $P'_{n+1} = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}P_n + \hat{Q}$ avec $\deg \hat{Q} < n$.

$$\text{Par suite } (P'_{n+1} | P_n) = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}(P_n | P_n) + (\hat{Q} | P_n) = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2 \text{ car } (\hat{Q} | P_n) = 0.$$

$$5.b \quad \|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = [xP_n(x)^2]_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 xP_n(x)P'_n(x) dx = 2 - 2 \int_{-1}^1 xP_n(x)P'_n(x) dx.$$

$$5.c \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n+1} \text{ donc } (P'_{n+1} | P_n) = (2n+1)\|P_n\|^2.$$

$$\text{De plus } P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x) \text{ donc } (P'_{n+1} | P_n) = (XP'_n | P_n) + (n+1)(P_n | P_n)$$

$$\text{or } (XP'_n | P_n) = \int_{-1}^1 xP'_n(x)P_n(x) dx = 1 - \frac{1}{2}\|P_n\|^2$$

$$\text{donc } (2n+1)\|P_n\|^2 = 1 - \frac{1}{2}\|P_n\|^2 + (n+1)\|P_n\|^2 \text{ puis } \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

6. P_{n+1} est un vecteur normal à l'hyperplan $\mathbb{R}_n[X]$ de l'espace $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

$$\text{Par suite } d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \left\| \frac{(X^{n+1} | P_{n+1})}{\|P_{n+1}\|^2} P_{n+1} \right\| = \frac{|(X^{n+1} | P_{n+1})|}{\|P_{n+1}\|}.$$

$$\text{or } X^{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} P_{n+1} + Q \text{ avec } \deg Q < n+1 \text{ donc } (X^{n+1} | P_{n+1}) = \frac{1}{a_{n+1}} \|P_{n+1}\|^2$$

$$\text{Par suite } d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \frac{1}{|a_{n+1}|} \|P_{n+1}\| = \frac{2^{n+1}((n+1)!)^2 \sqrt{2}}{(2n+2)! \sqrt{2n+1}}.$$