Probabilités

Devoir Maison N° 20

Lundi 18 Juin 2018

Exercice 1 — A chaque journée de cours, Mademoiselle J. mange soit à la cantine de son lycée soit n'a pas le temps de manger en raison d'un temps d'attente trop long devant cette cantine. Précisément, quand le professeur lui permet de sortir de classe avant la sonnerie, elle parvient à manger avec probabilité 2/5. Lorsque le professeur lui impose de sortir à la sonnerie, elle n'a alors qu'une chance sur cinq de manger. Malgré son programme fort chargé, le professeur compatit au pauvre sort de Mademoiselle J. et la laisse donc sortir en avance avec probabilité 2/3. On suppose que, d'un jour à l'autre, les décisions du professeur de laisser ou non sortir Mademoiselle J. en avance sont indépendantes. On introduit les événements suivants :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n : « Mademoiselle J. parvient à manger au n^e jour de cours ».
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n : « Le professeur laisse sortir Mademoiselle J. en avance au n^e jour de cours ».
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « Mademoiselle elle n'a pas mangé deux fois de suite *pour la première fois* aux $(n-1)^e$ et n^e jours de cours » [1].

1. Dans cette question, on considère un jour de cours $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

a) Montrer que $P(M_n) = 1/3$.

b) On constate que Mademoiselle J. n'a pas mangé, quelle est la probabilité que l'enseignant ne l'ait pas laissé sortir à l'avance.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = P(A_n)$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) A l'aide de la formule des probabilités totales établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$.
Pour le choix du système complet d'événement, on pourra s'inspirer de l'exercice 15 de la feuille d'exercice n° 7.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n$.

a) Montrer que S_n représente la probabilité d'un certain événement, dont on donnera un libellé explicite.

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite et interpréter le résultat.

Exercice 2 — Une puce évolue sur trois cases A, B et C. A l'instant $t = 0$, la puce se situe sur la case A puis elle se déplace de façon aléatoire sur ces trois cases selon la règle suivante :

- Si la puce se trouve en A ou en B à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$), alors elle ira sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité à l'instant $k+1$.
- Si la puce se trouve en C à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$), alors elle y restera à l'instant $k+1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les événement suivants :

- A_n : « La puce se trouve en A à l'instant n »,
- B_n : « La puce se trouve en B à l'instant n »,
- C_n : « La puce se trouve en C à l'instant n » ;

et on pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Exprimer chaque quantité a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géometrique et en déduire la valeur de c_n en fonction de n.

b) A l'aide de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ déterminer les valeurs de a_n et b_n en fonction de n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que la puce est en C à l'instant $n+1$, calculer la probabilité qu'elle y ait été *pour la première fois* à l'instant n.

Exercice 1 — 1. a) Le couple d'événements $(E_n, \overline{E}_n)$ forme un système complet d'événements. De plus, d'après l'énoncé, $P(E_n) = \frac{2}{3}$ et $P(\overline{E}_n) = \frac{1}{3}$. En particulier, E_n et $\overline{E}_n$ sont de probabilités non nulles si bien que la formule des probabilités totales nous permet d'écrire

$$P(M_n) = P(E_n)P_{E_n}(M_n) + P(\overline{E}_n)P_{\overline{E}_n}(M_n) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3},$$

ceci en utilisant les données $P_{E_n}(M_n) = \frac{2}{5}$ et $P_{\overline{E}_n}(M_n) = \frac{1}{5}$ fournies par l'énoncé.

b) Il s'agit de calculer $P_{\overline{M}_n}(\overline{E}_n)$. D'après la formule de Bayes, puisque $P(M_n) \neq 0$ et $P(E_n) \neq 0$,

$$P_{\overline{M}_n}(\overline{E}_n) = P_{\overline{E}_n}(\overline{M}_n)\frac{P(\overline{E}_n)}{P(\overline{M}_n)} = (1 - P_{\overline{E}_n}(M_n))\frac{P(\overline{E}_n)}{1 - P(M_n)} = \frac{4}{5}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{5}.$$

2. a)
- Au terme du premier jour, on ne peut avoir déjà sauté deux repas. Ainsi $A_1 = \varnothing$ et donc $u_1 = P(A_1) = 0$.
- A_2 est exactement l'événement « Mademoiselle J. n'a pas mangé aux deux premiers repas » c'est à dire $A_2 = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$ et donc $u_2 = P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2})$. Les décisions du professeur d'un jour sur l'autre étant indépendantes, les événements $\overline{M_1}$ et $\overline{M_2}$ le sont eux aussi donc $u_2 = P(\overline{M_1})\, P(\overline{M_2}) = (1 - P(M_1))(1 - P(M_2)) = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$.

b) Considérons un jour n quelconque et procédons à une disjonction de cas suivant les repas pris ou non durant les deux premiers jours. Précisément, commençons par remarquer que $(M_1, \overline{M_1} \cap M_2, \overline{M_1} \cap \overline{M_2})$ est un système complet d'événements de probabilités $P(M_1) = \frac{1}{3}$, $P(\overline{M_1} \cap M_2) = \frac{2}{9}$ et $P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) = \frac{4}{9}$ (en utilisant à nouveau l'indépendance de M_1 et M_2). Ces probabilités étant non nulles, on a donc, par la formule des probabilités totales

$$u_{n+2} = P(M_{n+2}) = P(M_1)P_{M_1}(M_{n+2}) + P(\overline{M}_1 \cap M_2)P_{\overline{M}_1 \cap M_2}(M_{n+2}) + P(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2)P_{\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2}(M_{n+2}).$$

Aussi :
- Sachant M_1 *i.e.* sachant que J. a mangé au premier jour, sauter pour la première fois d'affilée deux repas aux jours $n+1$ et $n+2$ revient à sauter pour la première fois ces deux repas aux n^{e} et $n+1^{e}$ jours à partir du jour 2. Par conséquent $P_{M_1}(M_{n+2}) = u_{n+1}$.
- De la même façon $P_{\overline{M}_1 \cap M_2}(M_{n+2}) = u_n$.
- Enfin, sachant $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$, mademoiselle J a manqué les deux premiers repas de l'année scolaire. Il est donc dans ce cas impossible que les jours $n+1$ et $n+2$ correspondent aux deux premiers repas consécutifs manqués. Ainsi $P_{\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2}(M_{n+2}) = 0$.

L'expression obtenue ci-dessus pour u_{n+2} s'écrit donc $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On constate par le calcul que l'équation caractéristique associée a deux racines réelles : $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$. Il existe donc deux constantes réelles λ et μ telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \lambda(-\frac{1}{3})^n + \mu(\frac{2}{3})^n$.

Au vu des valeurs de u_0 et u_1, les constantes λ et μ sont solutions du système $\begin{cases} -\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \\ \frac{1}{9}\lambda + \frac{4}{9}\mu = \frac{4}{9} \end{cases}$, d'où l'on tire $\begin{cases} \lambda = \frac{4}{3} \\ \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4}{3}(-\frac{1}{3})^n + \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^n$.

3. a) Par définition $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P(M_k)$. Or les événements M_k sont deux à deux incompatibles. On en déduit que $S_n = P(\bigcup\limits_{k=1}^{n} M_k)$. Par définition de la réunion, S_n est la probabilité de l'événement « Mademoiselle J. à sauté deux repas consécutifs à au moins une reprise durant les n premiers jours ».

b) Pour tout entier naturel non nul n, on a $S_n = \frac{4}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}(-\frac{1}{3})^k + \frac{2}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{2}{3})^k$. On sait calculer explicitement les deux sommes géométriques : $\sum\limits_{k=1}^{n}(-\frac{1}{3})^k = -\frac{1}{3}\frac{1-(-\frac{1}{3})^n}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}((-\frac{1}{3})^n - 1)$ et de même $\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{2}{3})^k = 2(1 - (\frac{2}{3})^n)$.

On a donc $S_n = \frac{1}{3}((-\frac{1}{3})^n - 1) + \frac{4}{3}(1 - (\frac{2}{3})^n)$. Vu que $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ et $1 < -\frac{2}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{3})^n = \lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n = 0$ donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$.

On en déduit que, sur un grand nombre de jours, il est presque sûr que Mademoiselle J saute deux repas consécutifs au moins une fois.

Exercice 2 — 1. Procédons à une disjonction de cas suivant la position de la puce à l'instant n : la famille (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule des probabilités totales donne ainsi :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = a_nP_{A_n}(A_{n+1}) + b_nP_{B_n}(A_{n+1}) + c_nP_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{b_n}{2},$$

et ce en utilisant les valeurs $P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$ et $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ fournies par l'énoncé.
En appliquant cette même formule pour exprimer $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ on obtient de façon similaire :

- $b_{n+1} = a_nP_{A_n}(B_{n+1}) + b_nP_{B_n}(B_{n+1}) + c_nP_{C_n}(B_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times 0 + c_n \times 0 = \frac{a_n}{2}$.
- $c_{n+1} = a_nP_{A_n}(C_{n+1}) + b_nP_{B_n}(C_{n+1}) + c_nP_{C_n}(C_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1 = \frac{a_n+b_n}{2} + c_n$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2} = \frac{u_n}{2}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En outre $u_0 = 1 + 0$ (car la puce est en A initialement donc $A_0 = \Omega$ et $B_0 = \varnothing$). Le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc donné, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (\frac{1}{2})^n u_0 = (\frac{1}{2})^n$.
Vu que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements on sait, en utilisant d'abord l'incompatibilité des événements deux à deux puis ensuite le fait que $\Omega = A_n \cup B_n \cup C_n$, que $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = P(A_n \cup B_n \cup C_n) = P(\Omega) = 1$.
Par conséquent $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - u_n = 1 - (\frac{1}{2})^n$.

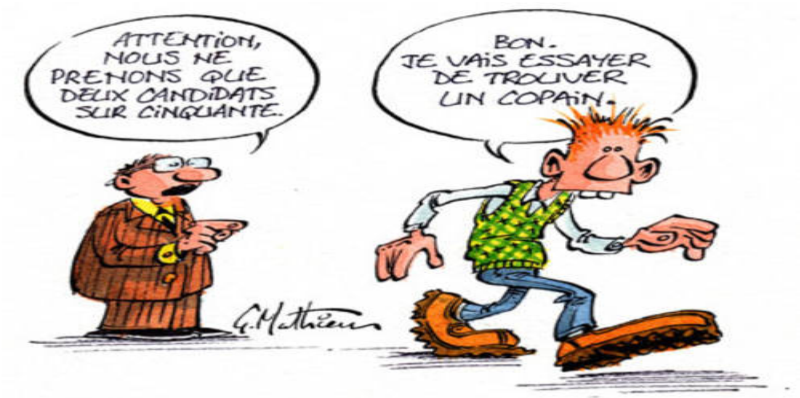
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{b_n}{2} - \frac{a_n}{2} = -\frac{1}{2}v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. En outre $v_0 = 1 - 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-\frac{1}{2})^n v_0 = (-\frac{1}{2})^n$.
Des deux égalités $a_n+b_n = (\frac{1}{2})^n$ et $a_n-b_n = (-\frac{1}{2})^n$ nous tirons $a_n = \frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n+(-\frac{1}{2})^n) = \frac{1+(-1)^n}{2^{n+1}}$ et $b_n = \frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n-(-\frac{1}{2})^n) = \frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}}$.

3. On cherche à calculer $P_{C_{n+1}}(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \cdots \cap \overline{C_{n-1}} \cap C_n)$.
Notons que si la puce n'est pas en C à l'instant $n-1$, alors elle ne peut avoir été en C à l'instant $n-2$ (car dès que la puce se trouve en C, elle y reste). Autrement dit, $\overline{C}_{n-1}$ implique $\overline{C}_{n-2}$, c'est à dire $\overline{C}_{n-1} \subset \overline{C}_{n-2}$. De même $\overline{C}_{n-2} \subset \overline{C}_{n-3}$, $\ldots$,$\overline{C}_2 \subset \overline{C}_1$. Ainsi, vu que $\overline{C}_{n-1} \subset \overline{C}_{n-2} \subset \cdots \subset \overline{C}_1$ on a en fait $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \cdots \cap \overline{C_{n-1}} = \overline{C}_{n-1}$.

La probabilité recherchée se réduit donc à $P_{C_{n+1}}(\overline{C_{n-1}} \cap C_n) = \frac{P(\overline{C_{n-1}} \cap C_n \cap C_{n+1})}{P(C_{n+1})} = \frac{P(\overline{C_{n-1}} \cap C_n \cap C_{n+1})}{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}$.

Ici encore puisque C_n implique C_{n+1} on a $C_n \cap C_{n+1} = C_n$ donc le numérateur s'écrit $P(\overline{C_{n-1}} \cap C_n \cap C_{n+1}) = P(\overline{C_{n-1}} \cap C_n)$.
Puisque $(A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1})$ est un s.c.e, on a $\overline{C}_{n-1} = A_{n-1} \cup B_{n-1}$ et, puisque A_{n-1} et B_{n-1} sont incompatibles, $P(\overline{C_{n-1}} \cap C_n) = P((A_{n-1} \cap C_n) \cup (B_{n-1} \cap C_n)) = P(A_{n-1} \cap C_n) + P(B_{n-1} \cap C_n) = P(A_{n-1})P_{A_{n-1}}(C_n) + P(B_{n-1})P_{B_{n-1}}(C_n) = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = (\frac{1}{2})^n$.

Finalement $P_{C_{n+1}}(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \cdots \cap \overline{C_{n-1}} \cap C_n) = \frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^n - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}-1}$.



Fin