Probabilités

Devoir Maison N° 20 bis

Vendredi 22 Juin 2018

Le but de ce problème est de démontrer que même en utilisant deux dés truqués, (donc des dés dont les six faces ne sont pas équiprobables), leur somme Z ne peut jamais suivre une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

2.1 Le cas des dés équilibrés

On lance deux dés équilibrés et on note Z la somme des deux résultats obtenus.

1. Déterminer $P(Z = 2)$ et $P(Z = 3)$. La variable Z suit-elle une loi uniforme $[\![2, 12]\!]$?
2. On note X_1 la valeur du premier dé. Les variables X_1 et Z sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance de Z.

2.2 Notion de fonction génératrice

Définition 1 *Soit X un variable aléatoire définie sur un univers fini Ω muni d'une probabilité P. On suppose que X prend des valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose pour tout $t \in]0, 1[$,*

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k)t^k.$$

La fonction G_X est appelée fonction génératrice de X.

Remarque : puisque X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, à partir d'un certain rang, les nombres $P(X = k)$ sont nuls, ainsi la somme est bien définie. La fonction G_X est donc une fonction polynomiale.

4. Donner la fonction génératrice d'une variable Z suivant une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.
5. Donner la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

Soit X et Y deux variables aléatoires finies à valeurs dans $\mathbb{N}$.

6. Justifier avec soin que si $G_X = G_Y$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(X = k) = P(Y = k)$.
7. On suppose en plus que X et Y sont indépendantes. Démontrer que
$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$
8. Une application : soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p. Calculer la fonction génératrice de $S = X_1 + \cdots + X_n$, en déduire la loi de S.

2.3 Application à la somme de deux dés

On suppose désormais jusqu'à la fin de l'exercice que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes prenant des valeurs dans $[\![1, 6]\!]$ (mais pas forcément de façon équiprobable). On pose $Z = X + Y$. On souhaite prouver que Z ne suit pas une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. On raisonne pour cela par l'absurde, en supposant que Z suit une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$

On note Q le polynôme défini par $\forall t \in \mathbb{R},\ Q(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{10}$.

9. Démontrer que Q n'admet pas de racines réelles.
10. Démontrer, à l'aide de fonctions génératrices, l'existence de deux polynômes Q_1 et Q_2, à coefficients réels, de degré 5 tels que :
$$\forall t \in]0, 1[,\ Q_1(t)Q_2(t) = \frac{1}{11}(1 + t + t^2 + \cdots + t^{10}).$$
11. Conclure à une contradiction.

Probabilités (Corrigé)

Devoir Maison N° 20 bis

2.1 Le cas des dés équilibrés

On lance deux dés équilibrés et on note Z la somme des deux résultats obtenus.

1. La variable Z suit-elle une loi uniforme $[\![2,12]\!]$? On modélise par deux tirages successifs. Il y a donc 36 couples de tirages possibles. Pour que la somme vaille 2, on doit obtenir le couple $(1,1)$. Pour obtenir une somme de 3, on peut obtenir les couples $(1,2)$ ou $(2,1)$. Ainsi $P(Z=2)=\frac{1}{36}$ et $P(Z=3)=\frac{2}{36}$. Puisque $P(Z=2)\neq P(Z=3)$, Z ne suit pas une loi uniforme.

2. On note X_1 la valeur du premier dé. Les variables X_1 et Z sont-elles indépendantes ? On a $P(X_1=6\cap Z=2)=0$ mais $P(X_1=6)P(Z=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}\neq 0$, donc X_1 et Z ne sont pas indépendantes.

3. Calculer l'espérance de Z. On note X_1 et X_2 les résulats des deux dés. Les variables X_1 et X_2 suivent une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$, donc $E(X_1)=E(X_2)=\frac{7}{2}$. On déduit par linéarité que $E(Z)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=7$.

2.2 Notion de fonction génératrice

Définition 1 *Soit X un variable aléatoire définie sur un univers fini Ω muni d'une probabilité P. On suppose que X prend des valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose pour tout $t\in]0,1[$,*

$$G_X(t)=E(t^X)=\sum_{k\in\mathbb{N}}P(X=k)t^k.$$

La fonction G_X est appelée fonction génératrice de X.

Remarque : puisque X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, à partir d'un certain rang, les nombres $P(X=k)$ sont nuls, ainsi la somme est bien définie. La fonction G_X est donc une fonction polynomiale.

4. Donner la fonction génératrice d'une variable Z suivant une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. LA varibale Z prend 11 valeurs de façon équiprobable, ainsi, pour tout $k\in[\![2,12]\!]$, $P(Z=k)=\frac{1}{11}$, donc

$$G_Z(t)=\frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12}t^k.$$

5. Donner la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. La variable X prend les valeurs k de $[\![0,n]\!]$ avec $P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^k$ où $q=1-p$. Ainsi

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^kt^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pt)^kq^k=(pt+q)^n.$$

Soit X et Y deux variables aléatoires finies à valeurs dans $\mathbb{N}$.

6. Si $G_X=G_Y$, alors pour tout $t\in]0,1[$, on a $G_X(t)=G_Y(t)$, autrement dit les polynômes associés à G_X et G_Y coïncident en une infinité de valeurs et donc sont égaux. On en déduit qu'ils ont les mêmes coefficients, ce qui donne que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $P(X=k)=P(Y=k)$.

7. Soit $t\in\mathbb{R}$, comme X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires t^X et t^Y sont encore indépendantes, donc $E(t^Xt^Y)=E(t^X)E(t^Y)=G_X(t)G_Y(t)$. D'autre part, $E(t^Xt^Y)=E(t^{X+Y})=G_{X+Y}(t)$, ce qui montre que $G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)$.

8. Une application : soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout i dans $[\![0,n]\!]$, la fonction génératrice de X_i est $G_{X_i}(t)=pt+q$. Comme les X_i sont indépendantes, on a $G_s(t)=G_{X_1}(t)\times\cdots\times G_{X_n}(t)=(pt+q)^n$. La variable S a donc la même fonction génératrice qu'une variable suivant une loi binomiale de paramètre n et p. On en déduit que S suit cette même loi d'après la question 6.

2.3 Application à la somme de deux dés

On suppose désormais jusqu'à la fin de l'exercice que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes prenant des valeurs dans $[\![1,6]\!]$ (mais pas forcément de façon équiprobable). On pose $Z = X+Y$. On souhaite prouver que Z ne suit pas une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. On raisonne pour cela par l'absurde, en supposant que Z suit une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$

On note Q le polynôme défini par $\forall t\in\mathbb{R},\ Q(t) = 1+t+t^2+\cdots+t^{10}$.

9. Démontrer que Q n'admet pas de racines réelles. On a déjà $Q(1) = 11 \neq 0$ et pour $t \neq 1$, on a $Q(t) = \frac{1-t^{11}}{1-t}$, donc ses racines complexes (hormis 1) sont les racines 11-ièmes de l'unité. Parmi ces racines, il n'y a que 1 comme racine réelle, donc Q n'admet pas de racines réelles.

10. Puisque X prend ses valeurs dans $[\![1,6]\!]$, on a $G_X(t) = P(X=1)t + P(X=2)t^2 + \ldots + P(X=6)t^6 = t\underbrace{(P(X=1) + P(X=2)t + \cdots + P(X=6)t^5)}_{Q_1(t)}$, avec Q_1 polynôme à coefficients réels, de degré 5. De même, $G_Y(t) = tQ_2(t)$ avec Q_2 polynôme à coefficients réels, de degré 5.

    Comme $Z = X+Y$ avec X et Y indépendantes, on a $G_Z = G_XG_Y$, et comme Z suit une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$, on a pour $t\in]0,1[$:

    $$\frac{1}{11}(t^2+t^3+\cdots+t^{12}) = t^2Q_1(t)Q_2(t).$$

    On obtient donc en divisant par t^2 que :

    $$\forall t\in]0,1[,\ Q_1(t)Q_2(t) = \frac{1}{11}(1+t+t^2+\cdots+t^{10}).$$

11. Conclure à une contradiction. Les polynômes Q_1Q_2 et $\frac{Q}{11}$ sont égaux sur $]0,1[$, donc sont égaux (ils coïncident en une infinité de valeurs). Or Q_1 est à coefficients réels et de degré 5 impair : il admet donc au moins une racine réelle (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires), donc Q_1Q_2 admet une racine réelle et donc Q aussi. Contradiction. Ainsi Z ne suit pas une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.