

Lundi 2 Octobre 2017

Nombres Complexes

On note $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

On appelle *homographie* toute fonction h de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$ associe $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ où a, b, c, d sont des complexes tels que $ad - bc \neq 0$.

Partie I – Un exemple

1. Soit h l'homographie définie par $h(z) = i \frac{1+z}{1-z}$.
 - a. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}, h(z) \in \mathbb{R}$.
 - b. Montrer que $\forall z \in \mathbb{D}, h(z) \in \mathbb{P}$.
 - c. Déterminer les points fixes de h , c'est-à-dire les complexes z tels que $h(z) = z$.
 - d. Pour quels $Z \in \mathbb{C}$, l'équation $h(z) = Z$ d'inconnue z admet-elle une solution ?
2. Soit g l'homographie définie par $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
 - a. Montrer que $\forall z \in \mathbb{R}, g(z) \in \mathbb{U}$.
 - b. Montrer que $\forall z \in \mathbb{P}, g(z) \in \mathbb{D}$.

Partie II – Homographies conservant \mathbb{U}

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.
2. Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}, \theta \in \mathbb{R}$ et l'homographie h définie par $h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$.
 - a. Montrer que h est bien une homographie et que h est définie sur \mathbb{U} .
 - b. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.
3. Inversement, on souhaite montrer que les seules homographies conservant \mathbb{U} sont celles des questions **II.1** et **II.2**. Soit donc h une homographie définie par $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ où a, b, c, d sont des complexes tels que $ad - bc \neq 0$ et vérifiant : $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.
 - a. Montrer que
$$\begin{cases} \bar{a}b = \bar{c}d \\ |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \end{cases}$$
 - b. Montrer que si $a = 0$, alors h est du type présenté dans la question **II.1**.
 - c. On suppose maintenant $a \neq 0$.
 - i. Montrer que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.
 - ii. Montrer que $|a| \neq |c|$.
 - iii. En déduire que h est du type présenté dans la question **II.2**.

El Bilal Sup
 Prepas MPST
 Pr. MAMOUNI

DM Complexes
 Corrigé

Partie I

1) $z \in \mathbb{U} \Rightarrow z = e^{i\theta}$
 $\Rightarrow h(z) = i \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$
 $\Rightarrow h(z) = i \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}} \in \mathbb{R}$

b) $z \in \mathbb{D} \Rightarrow |z| < 1$
 $\Rightarrow h(z) = i \frac{1+x+iy}{1-x-iy}$
 $= i \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{|1-z|^2}$
 $= i \frac{(1+x)(1-x) - y^2}{|1-z|^2} + i ?$

$\Rightarrow \text{Im } h(z) = \frac{(1+x)(1-x) - y^2}{|1-z|^2} = \frac{1-(x^2+y^2)}{|1-z|^2}$
 $= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0$

c) $h(z) = z \Leftrightarrow i \frac{1+z}{1-z} = z$

$\Leftrightarrow i(1+z) = z(1-z)$

$\Leftrightarrow z^2 + (i-1)z + i = 0$

$\Delta = (i-1)^2 - 4i = -6i = 6e^{3\pi/2}$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{6} e^{i3\pi/4} = \sqrt{3}(-1+i)$

$z = 1-i \pm \sqrt{3}(-1+i)$

$z = (1-i)(1 \pm \sqrt{3})$

d) $h(z) = z \Leftrightarrow i \frac{1+z}{1-z} = z$

$\Leftrightarrow i(1+z) = (1-z)z$

$\Leftrightarrow z(1+z) = z - i$

$\Leftrightarrow z = \frac{i+z}{z-i} \quad \& \quad z \neq i$

$\frac{z-a}{b}$ Pareil que do $\frac{z-i}{z-i}$

