

DM 5 : Mercredi 18 Octobre 2017

Fonctions Usuelles

On fixe un entier $N > 1$. Le but de cette partie est de calculer $S_N = \sum_{z \in E_N} \frac{1}{1-z}$ où $E_N = \cup_N \setminus \{1\}$ (ensemble des racines N^{es} de l'unité privé de 1), par trois méthodes différentes.

Q4) Méthode 1 : par calcul direct.

a) Étudier la fonction cotangente définie par :

$$\text{cotan} : x \mapsto \text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(En particulier vous étudierez son ensemble de définition, sa parité, sa périodicité, dresserez son tableau de variation sur un domaine pertinent, et tracerez l'allure de son graphe.)

b) Démontrer que pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, on a $\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

c) À l'aide du changement d'indice $p = N - k$, montrer que $\sum_{k=1}^{N-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{N}\right) = 0$.

d) En déduire une simplification de S_N .

Q5) Méthode 2 : par dérivation d'un polynôme.

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} x^k$.

a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $P(x) \neq 0$.

b) Calculer $P(1)$ et $P'(1)$.

c) Déterminer les racines complexes de P (i.e. les solutions de $P(z) = 0$).

On admet à présent que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \prod_{k=1}^{N-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{N}} \right)$.

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des fonctions dérivables sur \mathbb{R}^+ et qui ne s'annulent pas. On pose $f_n = \prod_{k=1}^n \varphi_k$. Montrer que f_n est dérivable sur \mathbb{R}^+ , que f_n ne s'annule pas, et que :

$$\frac{f'_n}{f_n} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi'_k}{\varphi_k}$$

On commencera par établir cette formule pour $n = 1$ puis $n = 2$.

e) En admettant que la formule précédente reste valable lorsque les fonctions φ_k sont à valeurs complexes (la variable x étant réelle), déterminer une expression simple pour $x \in \mathbb{R}^+$ de $\frac{P'(x)}{P(x)}$.

f) Retrouver ainsi la simplification de S_N

Q6) Méthode 3 : par une équation complexe.

On pose $Q(z) = (z - 1)^N - z^N$.

- Quel est le degré de $Q(z)$? Quel est le coefficient de z^{N-1} ?
- Démontrer que les solutions complexes de l'équation $Q(z) = 0$ sont exactement les termes de la somme S_N .
- En admettant que dans un polynôme de degré p la somme des racines est l'opposé du coefficient de z^{p-1} divisé par le coefficient de z^p , retrouver la simplification de S_N .
- Prolongements de la méthode 3.*
 - En admettant que dans un polynôme de degré p le produit des racines est le coefficient de z^0 multiplié par $(-1)^p$ et divisé par le coefficient de z^p , montrer que :

$$\prod_{z \in E_N} (1 - z) = N$$

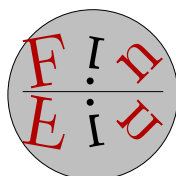
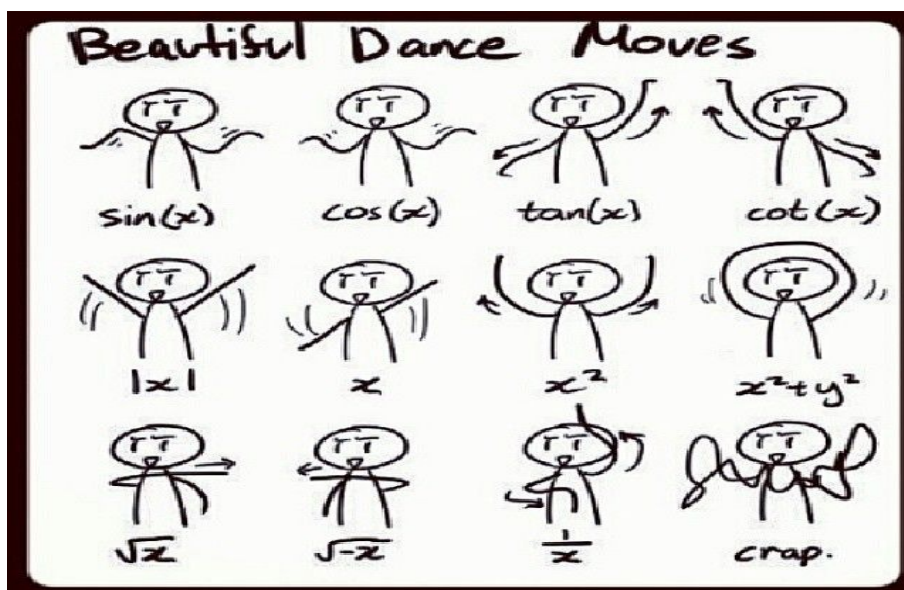
ii) En déduire que : $\prod_{k=1}^{N-1} \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \frac{N}{2^{N-1}}$.

- iii) Dans le cas où N est impair, $N = 2n + 1$, montrer que les racines de Q sont 2 à 2 conjuguées.
En déduire que :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = \frac{4^n}{2n+1}$$

puis que :

$$\prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$



EL Bilal Sup
 Prepas MPSI
 Pr. MAMOUNI

Course DM
 Fets Usuels

Q4)

a) Con

$$\begin{aligned}
 b) \frac{1}{1-e^{i\theta}} &= \frac{1}{-2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}} \\
 &= \frac{e^{-i\theta/2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cotan \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) S &= \sum_{k=1}^{N-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \sum_{p=N-k}^1 \cotan\left(\frac{p\pi}{N}\right) \\
 &= \sum_{p=1}^{N-1} \cotan\left(\frac{p\pi}{N} + \pi\right) \\
 &= -\sum_{p=1}^{N-1} \cotan\left(\frac{p\pi}{N}\right) = -S \\
 \text{dmc } S &= 0
 \end{aligned}$$

(1)

$$S_N = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{1-e^{ik\theta}}$$

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{2k\pi}{n} \\
 1 &\leq k \leq n \\
 \cos 2 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cotan \frac{\theta}{2} \right) \\
 &= \frac{N-1}{2} + \frac{i}{2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \cotan \frac{k\pi}{N} \right) = \frac{N-1}{2}
 \end{aligned}$$

Q5)

a) évident car $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
 b) P(1) &= 1 \\
 P'(1) &= \sum_{k=1}^{N-1} k x^{k-1} \Rightarrow P(1) = \sum_{k=1}^{N-1} k = \frac{N(N-1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) P(z) &= \frac{z^N - 1}{z - 1} = 0 \Leftrightarrow z^N = 1 \text{ et } z \neq 1 \\
 &(\Leftrightarrow) z = e^{\frac{2ik\pi}{N}} \quad 1 \leq k \leq N-1
 \end{aligned}$$

d) per recurrence $n=1, n=2$ ok
 herichte

$$f_{n+1} = f_n \times \varphi_{n+1}$$

$$\Rightarrow f'_{n+1} = f'_n \varphi_{n+1} + f_n \varphi'_{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{f'_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{f'_n}{f_n} \varphi_{n+1} + \varphi'_{n+1} \frac{f_n}{f_{n+1}}$$

$$= \frac{f'_n}{f_n} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_{n+1}} + \frac{\varphi'_{n+1}}{\varphi_{n+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi'_k}{\varphi_k} + \frac{\varphi'_{n+1}}{\varphi_{n+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \varphi'_k / \varphi_k$$

e) $P(x) = \prod_{k=1}^{N-1} \varphi_k(x)$ ou $\varphi_k(x) = x - e^{\frac{2k\pi i}{N}}$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum \frac{\varphi'_k}{\varphi_k} = \sum \frac{1}{x - e^{\frac{2k\pi i}{N}}}$$

f) for $x=1$ $S_N = \sum \frac{1}{1 - e^{\frac{2k\pi i}{N}}} = \frac{P'(1)}{P(1)}$

$$= \frac{N(N-1)}{2} \frac{1}{N} = \frac{N-1}{2}$$

Q6) a) $\psi(z) = (z-1)^N - z^N$

$$= \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^k z^k - (z^N)$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} (-1)^k z^k$$

deg = $N-1$ coeff = $\binom{N}{N-1} (-1)^{N-(N-1)}$

$$= -(N-1)$$

Q6) b) $Q(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)^N - z^N = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z}\right)^N = 1$

$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z} = e^{i\theta} \quad 1 \leq k \leq N$
 can $z \neq 1$

$\Leftrightarrow z-1 = e^{i\theta} z$

$\Leftrightarrow z(1 - e^{i\theta}) = 1$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{1 - e^{i\theta}}$

$\theta = \frac{2k\pi}{N}$

$1 \leq k \leq N-1$

c) i) $\sum \text{res} = - \frac{\text{coeff de } z^{N-2}}{\text{coeff de } z^{N-1}}$

$\sum \frac{1}{1 - e^{i\theta}} = - \frac{\binom{N}{2} (-1)^{N-(N-2)}}{-\binom{N}{1} (-1)^{N-(N-1)}}$

$= \frac{N-1}{2}$

(3)

i) $\text{Trace} = \frac{\text{coeff de } z^0 \times (-1)^{N-1}}{\text{coeff de } z^{N-1}}$

z same \Leftrightarrow 1-2 same

done $\prod 1-z = \frac{\binom{N}{0} (-1)^{N-0} \times (-1)^{N-1}}{\binom{N}{N-1} (-1)^{N-(N-1)}}$

$= N$

ii) $\prod (1-z) = \prod (1 - e^{i\theta}) = \prod -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$

$= \prod \sin \frac{\theta}{2} (-2i)^N \prod e^{i\theta/2}$

$= \prod \sin \frac{k\pi}{N} (-2i)^N e^{i\frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N-1} k}$

$= \prod \sin \frac{k\pi}{N} (2i)^N e^{i\frac{\pi}{N} \frac{N(N-1)}{2}}$

$= \prod \sin \frac{k\pi}{N} 2^{N-1} (-1)^{N-1} e^{i\frac{\pi}{2} N} e^{i\frac{\pi(N-1)}{2}}$

$= \prod \sin \frac{k\pi}{N} \times (-1)^N e^{i\pi N} (-1)^N$

Answer

$$N = \prod_{k=1}^{N-1} (1-z) = \prod_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k\pi}{N} 2^{N-1}$$

donc $\prod_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k\pi}{N} = \frac{N}{2^{N-1}}$

iii) by reciprocity

$$z_k = \frac{1}{1-e^{i\theta}} \quad \theta = \frac{2k\pi}{2n+1}$$

$$z_{2n+1-k} = \frac{1}{1-e^{i\frac{2(2n+1-k)\pi}{2n+1}}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-i\theta}} = \overline{z_k}$$

donc car $\prod_{k=1}^{N-1} z_k \overline{z_k} = \prod_{k=1}^{N-1} z_k \overline{z_k}$

$$= \prod_{k=1}^{N-1} |z_k|^2$$

$$= \prod_{k=1}^{N-1} \left| \frac{1}{1-e^{i\theta}} \right|^2$$

$$= \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2} (1 + \cotan^2 \frac{\theta}{2}) \quad \leftarrow \text{Q4. b}$$

$$= \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^{N-1} (1 + \cotan^2 \frac{\theta}{2}) = \frac{2^N}{N}$$

d'après Q6-d-i

iii) $1 + \cotan^2 \theta = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

$\frac{2^N}{N}$

(4)