

## Ensembles & Applications

Lundi 13 Novembre 2017

### Nombre de surjections entre ensembles finis

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

On note  $S_{n,p}$  le nombre de surjections de  $E_n$  sur  $E_p$ .

1. Calculer  $S_{n,p}$  si  $p > n$ .
2. Calculer  $S_{n,n}$ ,  $S_{n,1}$ , et  $S_{n,2}$ .
3. Calculer  $S_{p+1,p}$ .

On suppose désormais que  $0 < p \leq n$ .

4. Montrer que  $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} = 0$

5. Montrer que  $0 \leq k \leq q \leq p \Rightarrow \binom{p}{q} \binom{q}{k} = \binom{p}{k} \binom{p-k}{q-k}$ .

6. En déduire que, si  $0 \leq k < p$ , alors  $\sum_{q=k}^p (-1)^q \binom{p}{q} \binom{q}{k} = 0$  (et si  $k = p$  ?).

7. Montrer que pour tout entier  $q$  de  $\{1, 2, \dots, p\}$  le nombre d'applications de  $E_n$  dans  $E_p$  ayant un ensemble image à  $q$  éléments est égal à  $\binom{p}{q} S_{n,q}$ .

8. En déduire que  $p^n = \sum_{q=1}^p \binom{p}{q} S_{n,q}$ .

9. En utilisant ce qui précède, montrer que :  $S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{p}{k} k^n$ .

Indication :

– Transformer le second membre à l'aide de la question précédente.

– Justifier l'égalité  $\sum_{k=1}^p \sum_{q=1}^k \dots = \sum_{q=1}^p \sum_{k=q}^p \dots$

10. Montrer que si  $0 < p \leq n - 1$ , alors  $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$ .

Indication :

– Étant donné une surjection  $\varphi$  de  $E_n$  sur  $E_p$ , considérer sa restriction  $\varphi_1$  à  $E_{n-1}$ .

– Distinguer deux cas suivant que  $\varphi_1$  est ou n'est pas surjective

11. Retrouver la valeur de  $S_{p+1,p}$ , puis montrer que  $S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!$ .

12. En s'inspirant du triangle de Pascal, montrer qu'on peut construire une table des  $S_{n,p}$ .

Construire cette table pour  $0 < p \leq n \leq 7$ .

Corrigé © Jean-Michel Ferrard

- On sait que si  $p > n$  il n'y a pas de surjection de  $E_n$  sur  $E_p$ , donc  $S_{n,p} = 0$ .
- Toute application de  $E_n$  dans  $E_n$  est surjective si et seulement si elle est bijective.  
Or il y a  $n!$  bijections de  $E_n$  sur lui-même. On a donc  $S_{n,n} = n!$   
– Il n'y a qu'une application de  $E_n$  dans  $E_1$ , et elle est surjective. Donc  $S_{n,1} = 1$ .  
– Il y a  $2^n$  applications de  $E_n$  dans  $E_2$ . Parmi elles, deux seulement sont non surjectives (les applications constantes). Autrement dit  $S_{n,2} = 2^n - 2$ .
- L'application  $f : E_{p+1} \rightarrow E_p$  est surjective  $\Leftrightarrow$  tous les éléments de  $E_p$  ont exactement un antécédent, à l'exception d'un élément  $y$  de  $E_p$  qui doit en posséder deux.

Il y a  $p$  choix pour  $y$ , puis  $\binom{p+1}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$  choix pour les antécédents  $x_1, x_2$  de  $y$ .

Il reste ensuite à établir une bijection entre  $E_{p+1} \setminus \{x_1, x_2\}$  et  $E_p \setminus \{y\}$ , c'est-à-dire entre deux ensembles à  $p - 1$  éléments, ce qui peut se faire de  $(p - 1)!$  manières différentes.

Ainsi  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_{p+1,p} = p \binom{p+1}{2} (p - 1)! = p \frac{(p+1)p}{2} (p - 1)! = \frac{p}{2} (p + 1)!$

- Dans  $(1 + x)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k$ , on pose  $x = -1 : \forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k = (1 - 1)^p = 0$ .

- Pour  $0 \leq k \leq q \leq p$ , on a :

$$\binom{p}{q} \binom{q}{k} = \frac{p!}{q! (p - q)!} \frac{q!}{k! (q - k)!} = \frac{p!}{k! (p - k)!} \frac{(p - k)!}{(q - k)! ((p - k) - (q - k))!} = \binom{p}{k} \binom{p - k}{q - k}$$

- Si  $0 \leq k < p$ , on a :  $\sum_{q=k}^p (-1)^q \binom{p}{q} \binom{q}{k} = \sum_{q=k}^p (-1)^q \binom{p}{k} \binom{p - k}{q - k} = \binom{p}{k} \sum_{q=k}^p (-1)^q \binom{p - k}{q - k}$ .

Le changement d'indice  $r = q - k$  donne :  $\sum_{q=k}^p (-1)^q \binom{p}{q} \binom{q}{k} = (-1)^k \binom{p}{k} \sum_{r=0}^{p - k} (-1)^r \binom{p - k}{r}$

Mais cette dernière somme est nulle car  $p - k > 0$  (voir question 4.)

Si  $k = p$ , on a :  $\sum_{q=k}^p (-1)^q \binom{p}{q} \binom{q}{k} = (-1)^p \binom{p}{p} \binom{p}{p} = (-1)^p$ .

- Pour construire  $f : E_n \rightarrow E_p$  dont l'ensemble image contienne exactement  $q$  éléments, il faut choisir ces  $q$  éléments dans  $E_p$ , ce qui offre  $\binom{p}{q}$  possibilités différentes.

Il faut ensuite construire une surjection de  $E_n$  sur  $\text{Im}(f)$  (donc d'un ensemble de cardinal  $n$  vers un ensemble de cardinal  $q$ ) : il y a  $S_{n,q}$  possibilités différentes.

Il y a donc  $\binom{p}{q} S_{n,q}$  applications  $f : E_n \rightarrow E_p$  dont l'ensemble image a  $q$  éléments.

- Il y a  $p^n$  applications de  $E_n$  dans  $E_p$ , qu'on peut grouper suivant le cardinal  $q$  de leur ensemble image, l'entier  $q$  pouvant varier de  $q = 1$  à  $q = p$ .

Pour chaque valeur de  $q$ , on sait qu'il y a  $\binom{p}{q} S_{n,q}$  applications possibles.

Ce dénombrement permet donc d'écrire :  $p^n = \sum_{q=1}^p \binom{p}{q} S_{n,q}$ .

- En utilisant l'égalité précédente, on trouve :

$$(-1)^p \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{p}{k} k^n = (-1)^p \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{p}{k} \left( \sum_{q=1}^k \binom{k}{q} S_{n,q} \right) = (-1)^p \sum_{k=1}^p \sum_{q=1}^k (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} S_{n,q}$$

La double sommation ci-dessus s'effectue sur les couples  $(k, q)$  tels que  $\begin{cases} 1 \leq k \leq p \\ 1 \leq q \leq k \end{cases}$

L'ensemble des points de coordonnées  $(k, q)$  définit une zone triangulaire qui pour l'instant est "parcourue" ligne par ligne.

Dans un parcours colonne par colonne, les couples  $(k, q)$  sont caractérisés par  $\begin{cases} 1 \leq q \leq p \\ q \leq k \leq p \end{cases}$

L'interversion des deux sommes s'écrit donc :  $\sum_{k=1}^p \sum_{q=1}^k \dots = \sum_{q=1}^p \sum_{k=q}^p \dots$  On trouve alors :

$$(-1)^p \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{p}{k} k^n = (-1)^p \sum_{q=1}^p \sum_{k=q}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} S_{n,q} = (-1)^p \sum_{q=1}^p \left[ \sum_{k=q}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} \right] S_{n,q}$$

Le terme entre crochets vaut 0 si  $q < p$  et  $(-1)^p$  si  $q = p$ .

L'expression complète se réduit donc à  $S_{n,p}$ .

Conclusion : si  $1 \leq p \leq n$ , alors  $S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{p}{k} k^n$ .

10. Considérons une surjection quelconque  $\varphi$  de  $E_n$  dans  $E_p$ .

Il y a  $S_{n,p}$  manières de choisir  $\varphi$ . Notons  $\varphi_1$  la restriction de  $\varphi$  à  $E_{n-1}$ .

Il y a deux cas possibles, qui s'excluent mutuellement.

– Premier cas :  $\varphi_1$  est surjective de  $E_{n-1}$  sur  $E_p$ .

Il y a bien sûr  $S_{n-1,p}$  possibilités différentes de construire  $\varphi_1$ .

– Deuxième cas :  $\varphi_1$  n'est pas surjective.

Puisque  $\varphi_1$  est la restriction de  $\varphi$  à  $E_{n-1}$ , on a  $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\varphi_1) \cup \{\varphi(n)\}$ .

L'ensemble image  $\text{Im}(\varphi)$  est exactement de cardinal  $p$ , car  $\varphi$  est surjective.

L'ensemble  $\text{Im}(\varphi_1)$  est donc à priori de cardinal  $p$  ou  $p - 1$ .

Mais dire que  $\varphi_1$  n'est pas surjective, c'est écrire  $\text{Card}(\text{Im}(\varphi_1)) < p$ .

Cela équivaut à  $\text{Card}(\text{Im}(\varphi_1)) = p - 1$ .

Il revient au même de dire que  $\varphi_1$  est surjective de  $E_{n-1}$  sur  $E_p \setminus \{\varphi(n)\}$ .

Il y a donc autant de façons de construire  $\varphi_1$  qu'il y a de surjections d'un ensemble à  $n - 1$  éléments sur un ensemble à  $p - 1$  éléments, c'est-à-dire  $S_{n-1,p-1}$ .

Le nombre de choix possibles pour  $\varphi_1$  est donc  $S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}$ .

Une fois fixée  $\varphi_1$ , il y a  $p$  manières de choisir  $\varphi(n)$  dans  $E_p$ .

Ainsi le nombre de surjections  $\varphi : E_n \rightarrow E_p$  est  $p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$ .

Conclusion : si  $1 < p \leq n - 1$ , alors  $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$ .

11. – Sachant  $S_{p,p} = p!$ , la formule précédente donne :  $S_{p+1,p} = p(p! + S_{p,p-1})$ .

Montrons par récurrence que pour tout  $p \geq 1$ , on a :  $S_{p+1,p} = \frac{p}{2}(p+1)!$

La propriété est vraie au rang 1 puisque  $S_{2,1} = 1$  (on rappelle que  $\forall n \geq 1, S_{n,1} = 1$ .)

Supposons que cette propriété soit vraie au rang  $p - 1$ , avec  $p \geq 2$ .

On a alors  $S_{p+1,p} = p(p! + S_{p,p-1}) = p\left(p! + \frac{p-1}{2} p!\right) = p \cdot p! \frac{p+1}{2} = \frac{p}{2}(p+1)!$

Cela prouve la propriété au rang  $p$  et achève la récurrence.

On a ainsi retrouvé le fait que, pour tout entier  $p \geq 1, S_{p+1,p} = \frac{p}{2}(p+1)!$

– Pour tout entier  $p \geq 1$  :  $S_{p+2,p} = p(S_{p+1,p} + S_{p+1,p-1}) = p\left(\frac{p}{2}(p+1)! + S_{p+1,p-1}\right)$ .

Montrons par récurrence que pour tout entier  $p \geq 1$ , on a :  $S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!$

Quand  $p = 1$  on a  $\frac{p(3p+1)}{24}(p+2)! = 1$ , ce qui est bien la valeur de  $S_{3,1}$ .

Supposons le résultat établi au rang  $p - 1$ , avec  $p \geq 2$ . Alors :

$$\begin{aligned} S_{p+2,p} &= p\left(\frac{p}{2}(p+1)! + S_{p+1,p-1}\right) = p\left(\frac{p}{2}(p+1)! + \frac{(p-1)(3p-2)}{24}(p+1)!\right) \\ &= \frac{(p+1)!}{24} p(12p + 3p^2 - 5p + 2) = \frac{(p+1)!}{24} p(3p+1)(p+2) = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)! \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété au rang  $p$  et achève la récurrence.

12. La formule  $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$  est analogue à la formule  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ , qui permet de construire le triangle de Pascal. On construit là aussi un tableau triangulaire, où  $S_{n,p}$  figure à l'intersection de la ligne  $n$  et de la colonne  $p$ .

On sait d'autre part que  $S_{n,1} = 1$  (ce qui permet d'initialiser la première colonne du tableau) et que  $S_{n,n} = n!$  (ce qui permet d'initialiser la diagonale.)

On obtient ainsi :

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$	$p = 7$
$n = 1$	1						
$n = 2$	1	2					
$n = 3$	1	6	6				
$n = 4$	1	14	36	24			
$n = 5$	1	30	150	240	120		
$n = 6$	1	62	540	1560	1800	720	
$n = 7$	1	126	1806	8400	16800	15120	5040

Par exemple, en ligne 6, colonne 4, on lit  $S_{6,4} = 1560$  : il y a donc 1560 surjections d'un ensemble à 6 éléments sur un ensemble à 4 éléments.