Nombres réels

Mercredi 24 Novembre 2017

Niveau 2-3

Questions préliminaires :

1°) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b - a > 1$, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a < m < b$

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n+4} \geq 3\,(2n+1)\,(2n+3)$

3°) Soit A et B deux parties non vides bornées .
Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A)\ ,\ \sup(B))$.
Déterminer , en le justifiant , $\inf(A \cup B)$ en fonction de $\inf A$ et $\inf B$

Partie I :

On se propose de chercher les bornes de $A = \left\{ \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{n} \ / n \in \mathbb{N}^* \right\}$

1°) Montrer que A est borné .

On pose $A_1 = \left\{ \dfrac{1}{2^{2n+1}} - \dfrac{1}{2n+1} \ / n \in \mathbb{N} \right\}$ et $A_2 = \left\{ \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{2n} \ / n \in \mathbb{N}^* \right\}$

2°) Montrer que $\inf A_1 \leq \sup A_1 \leq 0 \leq \inf A_2 \leq \sup A_2$. Déterminer alors $\sup A$.

3°) On pose , pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{1}{2^{2n+1}} - \dfrac{1}{2n+1}$

Comparer pour b_{n+1} et b_n . En déduire $\inf A$

Partie II : Une partie dense

On se propose de montrer que $\{\ \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$ tel que $n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq a < b \leq 1$

1°)

(a). Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\left(2bp + b^2\right) - \left(2ap + a^2\right) > 1$

(b). En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $2ap + a^2 < k < 2bp + b^2$

(c). Montrer que $0 \leq k \leq 2p$

2°) On pose $n = p^2 + k$

(a). Montrer que $a < \sqrt{n} - E(\sqrt{n}) < b$

(b). En déduire que : $\{\ \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$ tel que $n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

3°) Déterminer un entier n tel que : $0.5 < \sqrt{n} - E(\sqrt{n}) < 0.6$

EL Bilia Sup
Prepas MPSI
Pr. MAMOUNI

DM Nombres Réels
Corrigé

Partie Préliminaire

1) $\cancel{m} = E(b)$ ou par l'absurde

2) Recurrence
$$2^{2(n+1)+4} = 2^{2n+4} \times 4 \geq 4(2n+1)(2n+3)$$
$$\geq 4(2n+3)(2n+5)$$
car $3(2n+1) \geq 2n+5$

3) Cours

Partie I

1) $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq 1$ et $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 \Rightarrow$ Aborné

2) $\inf A_1 \leq \sup A_1$ evident
$\inf A_2 \leq \sup A_2$
on $x \leq 0$ $\forall x \in A_1$
$x \geq 0$ $\forall x \in A_2$ donc $\sup A_1 \leq 0 \leq \inf A_2$
~~sup A = max~~

on a $A = A_1 \cup A_2$
donc $\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2)$
$= \sup A_2$ car $\sup A_1 \leq \sup A_2$
$= 1$ car $1 \in A_2$ et majore A_2

3) $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2^{2n+3}} - \frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+1}$
$$= \frac{1}{2^{2n+1}}\left(\frac{1}{4} - 1\right) + \frac{2}{(2n+3)(2n+1)}$$
$$= \frac{-3}{2^{2n+3}} + \frac{2}{(2n+3)(2n+1)}$$
$$= \frac{2^{2n+4} - 3(2n+1)(2n+3)}{} \geq 0$$
donc $(b_n) \nearrow$ et ~~donc~~ $\inf A_1 = \lim b_n = 0$
$\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2)$
$= \inf A_1 = 0$

Partie II

1) a) $x_p = (2bp + b^2) - (2ap + a^2)$

$= 2p(b-a) + b^2 - a^2$

$= (b-a)(2p + b + a) \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$

donc $x_p > 1$ à pcr

b) decoule du preliminaire qst 1

c) $k > 2ap + a^2 \geq 0$

$k < 2bp + b^2 \Rightarrow k \leq E(2bp + b^2)$

$2pb + b^2 = 2p + 2p(b-1) + b^2$

$b < 1 \Rightarrow 2bp + b^2 \leq 2p + b^2$

donc $E(2bp + b^2) \leq 2p$

2) a) $a^2 < k - 2ap = n - p^2 - 2ap$

$2ap + a^2 + b^2 < k + p^2 < 2bp + b^2 + p^2$

$(a+p)^2 < n < (p+b)^2$

$p < a + p < \sqrt{n} < p + b < p + 1$

$a < \underbrace{\sqrt{n} - p}_{E(\sqrt{n})} < b$

b) decoule de la def

entre deux reel existe fqr

un elt de $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n})\}$

3) $a = 0,5$ $\quad$ p tq $(2bp + b^2) - (2ap + a^2) > 1$

$b = 0,6$

puis $2pb + a^2 < k < 2bp + b^2$

et enfin $n = p^2 + k$

②