Simulation DS (Durée : 2 heures)

Suites Numériques

Jeudi 30 Novembre 2017

Euclide

Mathématicien de la Grèce antique. Aucune information fiable n'est parvenue sur la vie ou la mort d'Euclide ; il est possible qu'il ait vécu vers 300 avant notre ère. Son ouvrage le plus célèbre, les Éléments, porte sur la géométrie, tant plane que solide, est à la base de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire dans de nombreux pays. Du nom d'Euclide, dérivent en particulier l'algorithme d'Euclide, la géométrie euclidienne (et non euclidienne), la division euclidienne.

Niveau 1-2 : Exercice d'application

Équation de Pell-Fermat

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

admet une infinité de solutions dans $\mathbf{N}^2$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Développez $(3+2\sqrt{2})^n$ et déduisez-en l'existence d'entiers naturels x_n et y_n tels que

$$(3+2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}\, y_n$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Exprimez x_{n+1} en fonction de x_n et y_{n+1} en fonction de y_n.

3. Démontrez que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.

4. Concluez.

Niveau 3-4-5 : Problème

Suites de Cauchy

Définition : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que u est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbf{N})\ (\forall (m,p) \in \mathbf{N}^2) \quad (m \geqslant n_0 \text{ et } p \geqslant n_0 \Rightarrow |u_m - u_p| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque : une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc de Cauchy si deux termes quelconques u_m et u_p sont arbitrairement proches pourvu que m et p soient suffisamment grands.

Partie I. Une condition nécessaire de convergence

1. Montrez que toute suite de Cauchy est bornée.

2. Montrez que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Partie II. Convergence des suites de Cauchy

On se propose de montrer dans cette partie que toute suite de Cauchy (de nombres réels) converge.
Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de nombres réels.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On note $U_n = \{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$. Montrez que U_n possède une borne supérieure et d'une borne inférieure.
On note $v_n = \sup U_n = \sup\{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$ et $w_n = \inf U_n = \inf\{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$.

2. Montrez que la suite (v_n) (*resp.* (w_n)) ainsi construite est décroissante (*resp.* croissante).

3. Établissez que $\forall n \in \mathbf{N},\ w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy, on considère un entier n_0 (dont l'existence est garantie) tel que pour tout couple $(m,p) \in \mathbf{N}^2$ d'entiers supérieurs à n_0, on ait $|u_m - u_p| \leqslant \varepsilon$.
Soit (m,p) un tel couple. Montrez que $v_m \leqslant \varepsilon + u_p$, puis que $v_m - w_m \leqslant \varepsilon$.

5. Montrez enfin que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Partie III. Application :

Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$.

1. Justifiez l'existence d'un entier $q \in \mathbf{N}$ tel que $\forall k \in \mathbf{N}, k \geqslant q \Rightarrow \dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.

2. Montrez que pour tout couple $(m,p) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m \geqslant p \geqslant q$, on a $|u_m - u_p| \leqslant \dfrac{1}{2^p}$.

3. Déduisez-en que (u_n) est convergente

Blaque du jour

- Comment retenir dans un condensateur, qui est en avance, le courant ou la tension ?
  Réponse : CIVIL
  CIV : dans Condensateur (C), courant (I) puis tension (V), dans Bobine (L) l'inverse.
- Comment retenir la constante de temps d'un circuit RL ?
  Réponse : L/R bien sûr : l'aile (d'un oiseau) toujours en haut, et la terre en bas.
- Une diode a 2 bornes, l'anode et le cathode. Mais qui est la borne positive et qui est la borne négative.
  Réponse : Retenez simplement que l'âne est plus gros que le chat.

Corrigé

Niveau 1-2 : Exercice d'application

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. D'après la **formule du binôme de Newton**, on a

$$\begin{aligned}
(3+2\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(2\sqrt{2})^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}2^k\ (\sqrt{2})^k \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\ pair}} \binom{n}{k} 3^{n-k}2^k\ (\sqrt{2})^k + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\ impair}} \binom{n}{k} 3^{n-k}2^k\ (\sqrt{2})^k \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2\ell} 3^{n-2\ell}2^{2\ell}\ (\sqrt{2})^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} \binom{n}{2\ell+1} 3^{n-2\ell-1}2^{2\ell+1}\ (\sqrt{2})^{2\ell+1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2\ell} 3^{n-2\ell}2^{3\ell} + \sqrt{2}\times \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} \binom{n}{2\ell+1} 3^{n-2\ell-1}2^{3\ell+1}
\end{aligned}$$

Posons

$$x_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2\ell} 3^{n-2\ell}2^{3\ell} \quad \text{et} \quad y_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} \binom{n}{2\ell+1} 3^{n-2\ell-1}2^{3\ell+1}$$

x_n et y_n sont des entiers naturels qui vérifient

$$(3+2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}\ y_n.$$

Remarque : on peut également démontrer que les entiers x_n et y_n sont uniques. En effet, soit $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n)$ des couples d'entiers tels que :

$$x_n + \sqrt{2}y_n = x'_n + \sqrt{2}y'_n$$

On en déduit alors que $x'_n - x_n = \sqrt{2}(y_n - y'_n)$. On en déduit d'abord que $y'_n = y_n$. Sinon, on aurait en effet $\sqrt{2} = \dfrac{x'_n - x_n}{y_n - y'_n}$ ce qui est absurde vu que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ensuite, il en découle que $x'_n - x_n = 0$ ie, $x'_n = x_n$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$\begin{aligned}
(3+2\sqrt{2})^{n+1} &= x_{n+1} + \sqrt{2}y_{n+1} \\
&= (3+2\sqrt{2}) \times (3+2\sqrt{2})^n = (3+2\sqrt{2}) \times (x_n + \sqrt{2}y_n) \\
&= (3x_n + 4y_n) + \sqrt{2}(2x_n + 3y_n).
\end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture, il s'ensuit que

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

3. Montrons tout d'abord que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $x_n > 0$ et $y_n > 0$.

- **Initialisation :** pour $n = 1$, on a $x_1 = 3 > 0$ et $y_1 = 2 > 0$.
- **Hérédité :** soit $n \geqslant 1$ tel que $x_n > 0$ et $y_n > 0$. D'après la relation précédente, $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n > 0$ et $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n > 0$.
- **Conclusion :** Par récurrence on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $x_n > 0$ et $y_n > 0$

On en déduit alors aisément que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes. En effet, soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On a

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} - x_n & = & 2x_n + 4y_n > 0 \\ y_{n+1} - y_n & = & 2x_n + 2y_n > 0. \end{array}$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On observe que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_n + \sqrt{2}y_n & = & (3+2\sqrt{2})^n \\ x_n - \sqrt{2}y_n & = & (3-2\sqrt{2})^n \end{array} \right.$$

D'après l'**identité géométrique**, il en résulte que

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & (3+2\sqrt{2})^n \times (3-2\sqrt{2})^n \\ & = & (x_n + \sqrt{2}y_n) \times (x_n - \sqrt{2}y_n) \\ & = & x_n^2 - 2y_n^2 \end{array}$$

Autrement dit (x_n, y_n) est un couple solution de l'équation. Comme la suite (x_n) est strictement croissante, tous ces couples sont bien deux à deux distincts et donnent effectivement une infinité de solutions entières pour l'équation de Pell-Fermat. ▲

Niveau 3-4-5 : Problème

Partie I. Une condition nécessaire de convergence

1. Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de nombres réels. Appliquons la définition de suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$. Il en résulte l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que ✎

✎ La solution est directement inspirée de la preuve du théorème «bornitude d'une suite convergente» !

$$\forall (m,p) \in \mathbf{N}^2,\ (m \geqslant n_0 \text{ et } p \geqslant n_0) \Rightarrow |u_m - u_p| \leqslant 1 \qquad (1)$$

Posons $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, 1+|u_{n_0}|\}$. Considérons $k \in \mathbf{N}$: deux cas se présentent :

- si $k \in [\![0, n_0-1]\!]$, alors $u_k \in \{u_0, \ldots, u_{n_0-1}\}$ et dans ce cas, $|u_k| \leqslant M$.
- si $k \geqslant n_0$, alors l'**inégalité triangulaire** donne :

$$\begin{array}{rcl} |u_k| & \leqslant & |u_k - u_{n_0} + u_{n_0}| \\ & \leqslant & |u_k - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \end{array}$$

  Or d'après (1) $|u_k - u_{n_0}| \leqslant 1$, par suite

$$|u_k| \leqslant 1 + |u_{n_0}| \leqslant M$$

- dans tous les «k », on a bien établi que $|u_k| \leqslant M$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc bornée. ▲

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbf{R}$. Montrons que u est de Cauchy :

Travaillez bien la construction de cette solution.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme (u_n) est convergente de limite ℓ, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

On veut montrer que (u_n) est de Cauchy. C'est une propriété universelle en ε… si on veut avoir une chance d'arriver au bout : la démo doit démarrer par ≪Soit $\varepsilon > 0$ fixé.≫

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

Soit $(m,p) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m \geqslant n_0$ et $p \geqslant n_0$. Par l'**inégalité triangulaire**, il vient :

$$|u_m - u_p| = |u_m - \ell + \ell - u_p| \leqslant |u_m - \ell| + |u_p - \ell| \leqslant \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

▲

Partie II. Convergence des suites de Cauchy

On se propose de montrer dans cette partie que toute suite de Cauchy (de nombres réels) converge.
Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de nombres réels.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On note $U_n = \{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$. D'après la question **I.1**, la suite u est bornée. A fortiori, la partie non vide U_n est donc elle aussi majorée et minorée. D'après les **propriétés de la borne supérieure et inférieure**, U_n possède une borne supérieure et d'une borne inférieure.
On note $v_n = \sup U_n = \sup\{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$ et $w_n = \inf U_n = \inf\{u_k\ ;\ k \geqslant n\}$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On a par construction

$$U_{n+1} \subset U_n$$

Soit alors $k \geqslant n+1$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} u_k &\leqslant \sup\{u_k\ ;\ k \geqslant n\} \\ &\leqslant v_n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} u_k &\geqslant \inf\{u_k\ ;\ k \geqslant n\} \\ &\geqslant w_n \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout entier $k \geqslant n+1$, j'en déduis par *passÔsup* et *passAlinf* que $v_{n+1} \leqslant v_n$. et $w_{n+1} \geqslant w_n$.
Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a bien établi que la suite (v_n) est décroissante et que la suite (w_n) est croissante. ▲

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Clairement $u_n \in U_n$. Par construction de v_n et w_n, il en découle directement que $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$. ▲

4. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy, il existe un entier n_0 tel que pour tout couple $(m,p) \in \mathbf{N}^2$ d'entiers supérieurs à n_0, on ait $|u_m - u_p| \leqslant \varepsilon$.
Soit (m,p) un tel couple.
Soit $k \geqslant m$. On a donc $|u_k - u_p| \leqslant \varepsilon$, d'où l'on tire que $u_k \leqslant u_p + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $k \geqslant m$, on en déduit en passant au sup que $v_m \leqslant \varepsilon + u_p$. Autrement dit,

$$u_p \geqslant v_m - \varepsilon$$

Ceci étant vrai en particulier pour tout $p \geqslant m$, un passage à l'inf permet d'en déduire que $w_m \geqslant v_m - \varepsilon$.
Conclusion pour tout $\varepsilon > 0$, on a construit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que si $m \geqslant n_0$, on a $0 \leqslant v_m - w_m \leqslant \varepsilon$. Par définition, on a montré que la suite $(w_m - v_m)$ est convergente vers 0. ▲

5. D'après les questions **I.2,4**, les suites (v_m) et (w_m) sont donc adjacentes. D'après le **Théorème de convergence des suites adjacentes** elles sont conc convergentes de même limite. Notons ℓ leur limite commune.
Or, d'après la question **I.3** ces deux suites encadrent (u_m). D'après le **théorème de convergence par encadrement**, il en résulte que u est aussi convergente de limite ℓ. ▲

Partie III. Application :

1. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$.

a. Par récurrence, on montre que $\forall n \geqslant 4,\ n! \geqslant 2^n$.

- **Init.** pour $n = 4$, on a $4! = 24 > 2^4 = 16$.
- **Hér.** soit $n \geqslant 4$ tel que $n! \geqslant 2^n$. Alors

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \geqslant (n+1)\ 2^n \geqslant 5\ 2^n \geqslant 2^{n+1}$$

La propriété est héréditaire.

- **Ccl.** par récurrence, on a montré que $\forall n \geqslant 4,\ n! \geqslant 2^n$, ce qui revient précisément à dire que

$$\forall k \in \mathbf{N}, k \geqslant 4 \Rightarrow \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^k}$$

▲

b. Soit $(m,p) \in \mathbf{N}^3$ tel que $m \geqslant p \geqslant 4$, on a

$$\begin{aligned}
|u_m - u_p| &\leqslant \left|\sum_{k=p+1}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{m} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=p+1}^{m} \frac{1}{2^k} \\
&\leqslant \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{m-p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{p+1}} \frac{1-(1/2)^{m-p}}{1-(1/2)} \\
&\leqslant \frac{1}{2^p}
\end{aligned}$$

▲

c. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(1/2^p)$ est convergente vers 0, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que ($n_0 \geqslant 4$ et)

$$\frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

Soit $(m,p) \in \mathbf{N}^2$ tels que $m \geqslant n_0$ et $p \geqslant n_0$. D'après la question précédente, on en déduit que $|u_m - u_n| \leqslant \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il s'ensuit que (u_n) est de Cauchy. D'après la question **II.5**, ceci entraîne que la suite (u_n) est convergente. ▲

F I n
E I n