Devoir Maison

Suites Numériques

Jeudi 14 Décembre 2017

Algorithme de Babylone

L'objectif de ce problème est de présenter deux suites de nombres rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$ puis de comparer leur vitesse de convergence.
Les parties I et II sont totalement indépendantes, la partie III les exploitent toutes les deux.

Partie I – Première suite

On considère les suites réelles (p_n) et (q_n) définies par $\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$.

1.a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres p_n et q_n sont entiers strictement positifs.

1.b Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq q_n$.

2. On définit une suite réelle (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

2.a Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2.b Justifier que $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

2.c En déduire la limite de la suite (u_n).

3.a Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+2} = ap_{n+1} + bp_n$.

3.b En déduire l'expression du terme général de la suite (p_n).

3.c De même exprimer le terme général de la suite (q_n).

3.d Retrouver le résultat de la question I.2.c

Partie II – Deuxième suite

On considère la suite réelle (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{2}{v_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini et est un nombre rationnel de l'intervalle $[1, 2]$.

2. Observer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}$.

3. En déduire que $v_n \to \sqrt{2}$.

Partie III – Comparaison des vitesses de convergence

1. Donner les valeurs décimales approchées de u_3, v_3 et $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-3}.

2. On pose $t_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

2.a Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n, u_n et v_n.

2.b En déduire la limite de la suite (t_n).
Quelle est celle des deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent le plus rapidement vers $\sqrt{2}$?

Correction

Partie I

1.a Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, montrons $p_n,q_n\in\mathbb{N}^*$.

Pour $n=0$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.

$p_{n+1}=p_n+2q_n\underset{HR}{\in}\mathbb{N}^*$, $q_{n+1}=p_n+q_n\underset{HR}{\in}\mathbb{N}^*$.

Récurrence établie.

1.b Pour $n=0$: ok

Pour $n>0$: $p_n=p_{n-1}+2q_{n-1}\geq p_{n-1}+q_{n-1}=q_n$.

2.a $u_{n+1}=\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\dfrac{p_n+2q_n}{p_n+q_n}=\dfrac{u_n+2}{u_n+1}=1+\dfrac{1}{u_n+1}$.

2.b $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(u_n+2)-\sqrt{2}(u_n+1)}{u_n+1}=\dfrac{u_n(1-\sqrt{2})-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{u_n+1}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{u_n+1}\left(u_n-\sqrt{2}\right)$

Puisque $u_n=\dfrac{p_n}{q_n}\geq 1$ on a $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}-1}{u_n+1}\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leq\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|$.

2.c Par récurrence on a aisément : $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leq\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n\left|u_0-\sqrt{2}\right|$ or $\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right|<1$ donc $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n\to 0$ puis par comparaison $u_n\to\sqrt{2}$.

3.a $p_{n+2}=p_{n+1}+2q_{n+1}=p_{n+1}+2(p_n+q_n)=p_{n+1}+2p_n+\left(p_{n+1}-p_n\right)=2p_{n+1}+p_n$. $a=2,b=1$.

3.b (p_n) est une suite récurrente linéaire double d'équation caractéristique : $r^2=2r+1$ de racines $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$ donc $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $\forall n\in\mathbb{N},p_n=\lambda(1+\sqrt{2})^n+\mu(1-\sqrt{2})^n$.

$p_0=1$ et $p_1=p_0+2q_0=3$ donne : $\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda(1+\sqrt{2})+\mu(1-\sqrt{2})=3\end{cases}$.

Après résolution $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ et $\mu=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ d'où $p_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$.

3.c $q_{n+2}=p_{n+1}+q_{n+1}=p_n+2q_n+q_{n+1}=(q_{n+1}-q_n)+2q_n+q_{n+1}=2q_{n+1}+q_n$.

(q_n) est une suite récurrente linéaire double de même équation caractéristique que (p_n).

donc $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $\forall n\in\mathbb{N},q_n=\lambda(1+\sqrt{2})^n+\mu(1-\sqrt{2})^n$.

$q_0=1$ et $q_1=p_0+q_0=2$ donne : $\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda(1+\sqrt{2})+\mu(1-\sqrt{2})=2\end{cases}$.

Après résolution $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\mu=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ d'où $q_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}$.

3.d $p_n\sim\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$ et $q_n\sim\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}$ car $\left|1-\sqrt{2}\right|<\sqrt{2}+1$.

Par suite $u_n=\dfrac{p_n}{q_n}\sim\sqrt{2}$ et donc $u_n\to\sqrt{2}$.

Partie II

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons les trois propriétés simultanément.
Pour $n = 0$: it's good
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
Comme $v_n \in [1,2]$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right)$ est bien définie.
De plus $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{1}\right) = 2$ et $v_{n+1} \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = 1$ donc $v_{n+1} \in [1,2]$.
Enfin puisque $v_n \in \mathbb{Q}$, on a $v_{n+1} \in \mathbb{Q}$ par opérations sur les nombres rationnels.
Récurrence établie

2. $$v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{v_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(v_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(v_n - \sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2} - v_n}{v_n\sqrt{2}}$$
donc $v_{n+1} - \sqrt{2} = \left(v_n - \sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{v_n\sqrt{2}}\right) = \left(v_n - \sqrt{2}\right)\frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n} = \frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}$.

3. $$\left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \frac{\left|v_n - \sqrt{2}\right|}{2\left|v_n\right|}\left|v_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|v_n - \sqrt{2}\right| \text{ car } v_n \in [1,2].$$
Par suite $\left|v_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|v_0 - \sqrt{2}\right| \to 0$ et par comparaison $v_n \to \sqrt{2}$.

Partie III

1. $u_3 = \frac{17}{12} = 1{,}417$, $v_3 = 1{,}414$ et $\sqrt{2} = 1{,}414$ à 10^{-3} près.

2.a $$t_{n+1} = \frac{v_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} - \sqrt{2}} = \frac{\dfrac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}}{\dfrac{1 - \sqrt{2}}{u_n + 1}\left(u_n - \sqrt{2}\right)} = \frac{u_n + 1}{1 - \sqrt{2}}\frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n}t_n.$$

2.b Par opérations sur les limites $\frac{u_n + 1}{1 - \sqrt{2}}\frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n} \to 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ ce terme est inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{2}$.
On obtient alors par récurrence : $\forall n \geq N, \left|t_n\right| \leq \frac{1}{2^{n-N}}\left|t_N\right|$ et puisque $\frac{1}{2^{n-N}} \to 0$ on conclut $t_n \to 0$.
Ainsi la suite (v_n) converge vers $\sqrt{2}$ plus vite que la suite (u_n).