DS 1 : Mercredi 4 Octobre 2017

Logie & Sommes
Nombres Complexes

Durée : 4 heures

Leonhard Euler (1707-1783)

Mathématicien et un physicien suisse. Complètement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moitié de son travail durant cette période. Euler fut profondément pieux pendant toute sa vie, il répondait souvent cette anecdote : $e2i\pi+1=0$, donc Dieu existe. Certains scientifiques ont appelé cette identité la « formule la plus remarquable du monde ». Euler écrit *Tentamen novae theoriae musicae* qui est une tentative d'accorder les mathématiques et la musiqu. Dans les sciences économiques, il prouve que si chaque facteur de production est payé à la valeur de son produit marginal, alors le revenu total et le rendement seront complètement épuisés.

Blaque du jour

- La vie est complexe, elle a une partie réelle et une autre imaginaire.
- Que dira un homme complexe à une femme pour la demander au mariage : Viens dans mon monde ; viens dans $\mathbb{C}$. Je ne sais pas danser lui repondit-elle.

Questions de Cours & Applications

1. Complétez les formules suivantes :
   - i. $\overline{P \text{ et } Q} = \cdots$
   - ii. $\overline{P \text{ et } (Q \text{ ou } R)} = \cdots$
2. Parmi les équivalences suivantes, préciser celles vraies et celle fausses. Justifiez la réponse :
   - i. $\forall x \in A,\ \exists y \in B$ tq x, y vérifient $P \Leftrightarrow \exists y \in B,$ tq $\forall x \in A$ on a x, y vérifient P ;
   - ii. $\forall x \in A,\ (x$ vérifie P et $Q) \Leftrightarrow (\forall x \in A,\ x$ vérifie $P)$ et $(\forall x \in A,\ x$ vérifie $P)$.
   - iii. $\exists x \in A,\ (x$ vérifie P et $Q) \Leftrightarrow (\exists x \in A,\ x$ vérifie $P)$ et $(\exists x \in A,\ x$ vérifie $P)$.
3. .
   - i. Rappelez l'écriture exponentielle des $(z_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$, racines n-èmes de l'unité ;
   - ii. Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} z_k,\ \prod_{k=0}^{n-1} z_k$.
4. Linéariser $\sin^3(\theta)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

Exercice 1 : Logie

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

1) Tout entier naturel est pair ou impair.

2) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.

3) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.

4) Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

Exercice 2 : Modes de raisonnement

1) Démontrer : pour tout $n\in\mathbb{N}$, 4^n+2 est divisible par 3. (a divisible par 3 s'écrit : $a = 3q$)

2) Démontrer : $a\geqslant 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(1+a)^n\geqslant 1+na$.

Exercice 4 : Nombres Complexes

Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ la racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité.

1.a. Résolvez dans $\mathbf{C}$, l'équation $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$.
Indication : vous pourrez observer que 1 n'est certainement pas solution.

b. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.

c. Déduisez de la question précédente l'expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2$ en fonction de n.

2.a. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrez que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{kp}$ vaut n si $p = 0$ ou $p = n$ et est nulle sinon.

b. Montrez que pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (z + \omega^k)^n = n(z^n + 1)$.

3. Soit a, b deux nombres complexes

a. Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b)$ en fonction de n et de a.

b. Montrez que $\displaystyle n|a| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |b + \omega^k a| = \sum_{p=1}^{n} |a + \omega^p b|$

c. Déduisez-en que $\displaystyle |a| + |b| \leqslant \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$

Exercice 3 : Sommes & Produits

Partie I

On pose $f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Donner une forme simple de la dérivée de f (on rappelle que la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées).

2 En déduire que $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leqslant \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

3 En déduire la valeur de $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

Partie II

Pour x réel et $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (x+1)^k$.

Q1) a) Montrer que pour x non nul, on a $P_n(x) = \frac{(x+1)^{n+1}-1}{x}$.

b) En déduire que pour tout réel x, $P_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p+1} x^p$.

Q2) a) Montrer que $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^p \right)$.

b) En déduire que $P_n(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p \left(\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \right)$ (on attend une justification).

Q3) En admettant que deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients, déduire de ce qui précède une simplification de $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$ lorsque $p \in [\![0;n]\!]$.

Partie III

1. Un cas particulier

a. Quel est le coefficient de x^4 dans le développement de $(1+x)^8$ par la formule du binôme. On ne demande pas de valeur numérique de ce coefficient. En remarquant que $(1+x)^8 = (1+x)^4 \times (1+x)^4$ exprimez ce coefficient à l'aide des coefficients $\binom{4}{k}$.

b. Déduisez-en que $\binom{4}{0}^2 + \binom{4}{1}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{3}^2 + \binom{4}{4}^2 = \binom{8}{4}$.

2. Le cas général

Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel. Par un raisonnement que vous détaillerez, démontrez la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

3. Notons pour $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$.

a. Montrez que $S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k}^2$.

b. Déduisez-en l'expression de $2S_n$ puis de S_n en fonction de n.

Questions de Cours & Applications

1. i. $\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$

   ii. $\overline{P \text{ et } (Q \text{ ou } R)} = \overline{P} \text{ ou } (\overline{Q} \text{ et } \overline{R})$.

2. i. Fausse car dans le 1èr cas pour chaque y on trouve un x associé, mais dans le 2ème cas, un x commun est associé à tous les y ;

   ii. Vrai, car dans les deux cas tous les éléments x de A vérifient les propriétés P et Q ;

   iii. Fausse, car dans le 1èr cas il y a x qui vérifie à la fois P et Q, mais dans le 2ème cas, il y a un x qui vérifie P et un autre x qui vérifie Q.

3. .

   i. $z_k = w^k$, où $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$;

   ii. $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} w^k = \frac{1-w^n}{1-w} = 0$, car $w^n = 1$;

   iii. $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{i\frac{2\pi}{n}\frac{(n-1)n}{2}} = e^{i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1}$, car $e^{i\pi} = -1$.

4. $\sin^3(\theta) = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{(2i)^3} = -\frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}) = -\frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) + 3e^{-i\theta} - 3e^{i\theta}) = \frac{-\sin 3\theta + 3\sin\theta}{8}$.

5. On remarque que $z = 1$ est solution de l'équation $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$. En effectuant la division euclidienne, on trouve que $z^3 - z^2 + z - 1 = (z-1)(z^2+1)$, donc les autres solutions sont $\pm i$.

Exercice 1 : Logie

1) $\forall n \mathbb{N}$, $((\exists k \in \mathbb{N}/\ n = 2k)$ ou $(\exists k \in \mathbb{N}/\ n = 2k+1))$. Cette proposition est vraie car pour chaque n, l'une des deux propositions « n est pair » ou « n est impair » est vraie.

2) $(\forall n \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}/\ n = 2k)$ ou $(\forall n \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}/\ n = 2k+1))$. Cette proposition est fausse car chacune des deux propositions « tout entier naturel n est pair » et « tout entier naturel n est impair » est fausse.

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}/\ n < m$. Cette proposition est vraie. En effet, si n est un entier naturel, l'entier $m = n+1$ est strictement plus grand que n.

4) $\exists m \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ n < m$. Cette proposition est fausse.

Exercice 2 : Modes de raisonnement

On appelle $P(n)$. la proposition : $4^n + 2$ est divisible par 3. Initialisation $4^0 + 2 = 3$ donc $P(0)$ vraie.
Hérédité On suppose $P(n)$ vraie. Donc que $4^n + 2 = 3\ p$ ou encore $4^n = 3\ p - 2$
$4^{n+1} + 2 = 4^n \times 4 + 2 = (3\ p - 2) \times 4 + 2 = 12\ p - 6 = 3\ (4\ p - 2)$ Donc $P(n+1)$ est vraie.

On appelle $P(n)$ la proposition : $a \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}^*, (1+a)^n \geqslant 1 + na.$
Initialisation $1 + a \geqslant 1 + a$ donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité. On suppose $P(n)$ vraie.
$a \geqslant 0$ donc $1 + a > 0$ et $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geqslant (1+na)(1+a)$ en appliquant $P(n)$
$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a$ ($na^2 \geqslant 0$)
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Exercice 3 : Sommes & Produits

1. Un cas particulier

a. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(1+x)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^k$$

En particulier, le coefficient de x^4 dans $(1+x)^8$ est $\binom{8}{4}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}(1+x)^8 &= (1+x)^4\times(1+x)^4\\ &= \left[\tbinom{4}{0}+\tbinom{4}{1}x+\tbinom{4}{2}x^2+\tbinom{4}{3}x^3+\tbinom{4}{4}x^4\right]\times\left[\tbinom{4}{0}+\tbinom{4}{1}x+\tbinom{4}{2}x^2+\tbinom{4}{3}x^3+\tbinom{4}{4}x^4\right]\\ &= 1+\cdots+\left[\tbinom{4}{0}\tbinom{4}{4}+\tbinom{4}{1}\tbinom{4}{3}+\tbinom{4}{2}\tbinom{4}{2}+\tbinom{4}{3}\tbinom{4}{1}+\tbinom{4}{4}\tbinom{4}{0}\right]x^4+\cdots+x^8.\end{aligned}$$

En identifiant le coefficient de x^4 dans ces deux expressions développées, il vient :

$$\binom{8}{4}=\binom{4}{0}\binom{4}{4}+\binom{4}{1}\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\binom{4}{2}+\binom{4}{3}\binom{4}{1}+\binom{4}{4}\binom{4}{0}.$$

b. D'après la **Formule des compléments**, on a : $\binom{4}{0}=\binom{4}{4}$ et $\binom{4}{1}=\binom{4}{3}$. Par conséquent,

$$\binom{8}{4}=\binom{4}{0}^2+\binom{4}{1}^2+\binom{4}{2}^2+\binom{4}{3}^2+\binom{4}{4}^2.$$

2. Le cas général

Soit $n\in\mathbf{N}$ un entier naturel. On a d'une part $(1+x)^{2n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$, de sorte que le coefficient de x^n dans $(1+x)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$. D'autre part, observons que

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= (1+x)^n\times(1+x)^n=\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right]\times\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right]\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}x^{i+j}=\sum_{k=0}^{2n}\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=k}}\binom{n}{i}\binom{n}{j}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}x^k\end{aligned}$$

Sous cette forme, le coefficient de x^n vaut :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Par **identification des coefficients**, il en résulte :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

3. Notons pour $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$.

a. À l'aide du changement d'indice $\ell = n - k$, on a $\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}^2 = \sum_{\ell=0}^{n} \ell \binom{n}{n-\ell}$. D'près la **Formule des compléments**, on en déduit que

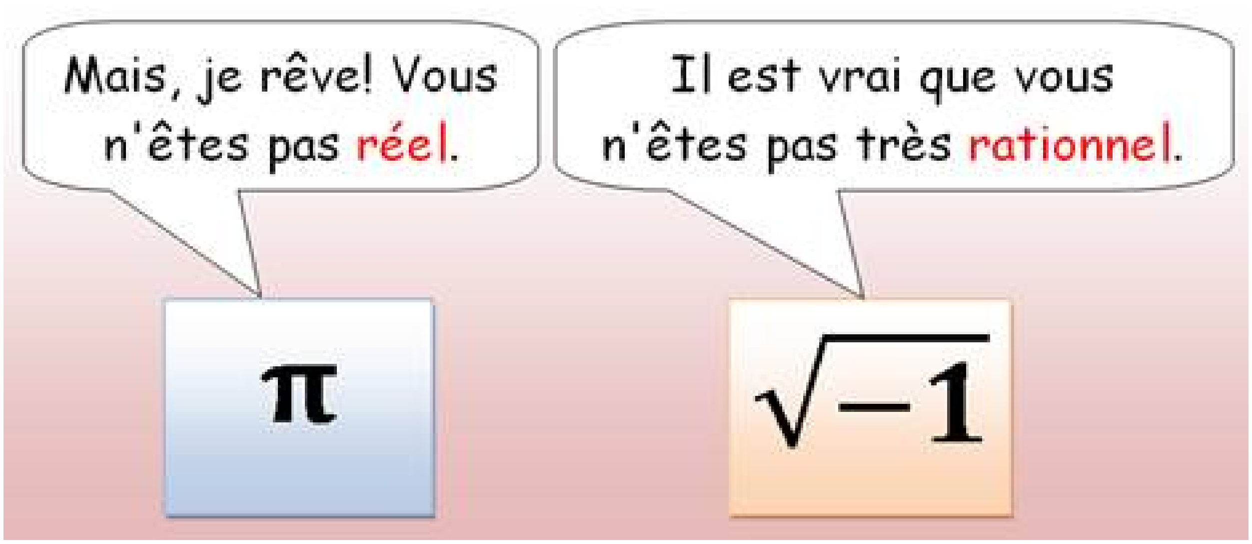
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}^2.$$

b. Ainsi, à l'aide de la **Formule de Vandermonde**, il vient :

$$\begin{aligned} 2S_n &= S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 + \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}^2 \\ &= n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Finalement, en divisant par 2 :

$$S_n = \frac{1}{2}n\binom{2n}{n}.$$



Exercice 4 : Nombres Complexes

Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1.a. Soit $z \in \mathbf{C}$, on repère directement que l'équation a une bonne tête d'**identité géométrique** :

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0 \iff \begin{cases} z \neq 1 \\ 1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq 1 \\ \dfrac{1 - z^n}{1 - z} = 0 \end{cases}$$
$$\iff z^n = 1 \text{ et } z \neq 1$$

Finalement, les solutions de l'équation

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0 \tag{1}$$

sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité différentes de 1 :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\right\}}$$

▲

b. D'après la question précédente, ω est solution de l'équation (1). A l'aide de la **formule de Moivre**, il s'ensuit que,

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

Finalement, en identifiant les parties réelles de cette dernière égalité, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

▲

c. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On utilise une factorisation par l'**exponentielle imaginaire de l'angle moitié** :✎

✎ $e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = 2i \sin \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$

$$|\omega^k - 1|^2 = |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1|^2 = |2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)|^2 = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

La formule de linéarisation $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ permet de conclure que

$$|\omega^k - 1|^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

Il ne reste plus qu'à sommer terme à terme. A l'aide de la question précédente, il en découle que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2 = 2\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) = 2n}$$

▲

2.a. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Si $p=0$ ou $p=n$, alors $\omega^p = 1$ et par conséquent $\sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = n$. Si $p \in [\![1,n-1]\!]$, alors $\omega^p \neq 1$ et l'**identité géométrique** donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \omega^p \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \omega^p \frac{(\omega^p)^n - 1}{\omega^p - 1} = 0$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \begin{cases} \text{n si } p = 0 \text{ ou } p = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

▲

b. Soit $z \in \mathbf{C}$, la **formule du binôme** donne

$$\sum_{k=1}^{n} (z+\omega^k)^n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^{n-p} (\omega^k)^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^{n-p} \sum_{k=1}^{n} (\omega^k)^p$$

Or, d'après la question précédente, la somme intérieure est nulle sauf si $p \in \{0,n\}$, auxquels cas, elle vaut n. Par suite

$$\sum_{k=1}^{n} (z+\omega^k)^n = \binom{n}{0} n z^n + \binom{n}{n} n z^0 = n(1+z^n)$$

▲

3. Soit a, b deux nombres complexes

a. $\sum_{k=0}^{n-1} (a+\omega^k b) = na + b \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = na$, car ✎ $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$. ▲

✎ *d'après la question* **1.a**

b. À l'aide de l'**inégalité triangulaire**, il en résulte directement que ✎

✎ *La dernière égalité provenant simplement du fait que $\omega^n = \omega^0 = 1$!!*

$$n|a| = |na| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a+\omega^k b) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| a+\omega^k b \right| = \sum_{p=1}^{n} |a+\omega^p b|$$

Le changement d'indice $k = n-p$ dans la dernière somme donne alors

$$n|a| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| a+\omega^k b \right| = \sum_{p=1}^{n} |a+\omega^p b| = \sum_{k=0}^{n-1} |b+\omega^k a|$$

▲

c. En divisant par n, on obtient pour tout couple (a,b) :

$$|a| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a+\omega^k b| \text{ et } |a| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |b+\omega^k a|$$

Dans la deuxième inégalité, échangeons les rôles de a et b, il vient $|b| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a+\omega^k b|$. Finalement, en ajoutant terme à terme il vient :

$$|a| + |b| \leqslant \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a+\omega^k b|$$

▲

Corrigé DS 1

Ex 3

Partie I

1) $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right)'$

$(\sum)' = \sum()'$

$= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{k x^{k-1}}{k}$

$k=0 \Downarrow 0$

$= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1}$

chg indice

$= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k$

geom de raison $-x$

$= \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$

$= \frac{(-x)^n}{1+x}$

2) pour $n = 2p$ pair la dérivé ≥ 0

donc $f \nearrow$ sur $]0, +\infty)$

mais $f(0) = 0$

donc $f(x) \geq f(0)$

cad $\ln(1+x) \geq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

pour $n = 2p+1$ impair

l'inverse

3) $\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

$\Rightarrow \quad x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$-1/2 \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -1/2 + x/3$

$\lim = -1/2$

Q3 Partie II

1

Q1) a) $\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k = \frac{1-(1+x)^{n+1}}{1-(1+x)}$

$= \frac{(x+1)^n - 1}{x}$

b) $\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p+1}x^p = \sum_{p=1}^{n+1}\binom{n+1}{p}x^{p-1}$

chgt indic

$= \frac{1}{x}\sum_{p=1}^{n+1}\binom{n+1}{p}x^p$

$= \frac{1}{x}\left(\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}x^p - 1\right)$

$= \frac{1}{x}\left[(x+1)^n - 1\right)$

$= P_n(x)$

Q2) a) $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(x+1)^k$ Newton

$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^p\right)$

b) $\sum_{p=0}^{n}x^p\sum_{k=p}^{n}\binom{p}{k}$

$= \sum_{0\le p\le k\le n} x^p\binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\underbrace{\sum_{p=0}^{k}\binom{p}{k}x^p}_{\text{Newton}}\right)$

Fubini

$= \sum_{k=0}^{n}(1+x)^k = P_n(x)$

Q3) $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$ coeff de x^p selon Q2-b

$\binom{n+1}{p+1}$ " " Q1-b

d'ù egalite

$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$