

DS 2 (Partie I) : Mercredi 25 Octobre 2017

# Fonctions Usuelles

## Équations Différentielles

Durée : 2 heures

### Questions de Cours

1 Compléter les formules suivantes :

i  $\cos a - \cos b = \dots$  ;

ii  $\tan(a + b) = \dots$  ;

iii  $\operatorname{ch}(a + b) = \dots$  ;

2 Exprimer  $\cos \theta$  en fonction de  $u = \tan(\theta/2)$  ;

3 Rappelez les dérivées des fonctions suivantes :

i  $\arccos$ ,  $\arcsin$  ;

ii  $\arctan$  ;

iii  $\operatorname{th}$  ;

4 Compléter les formules suivantes :

i  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \dots$  ;

ii  $\arccos x + \arcsin x = \dots$  ;

iii  $\cos \arcsin x = \dots$  ;

### Exercices d'application

1 Résoudre l'équation différentielle suivante :

i  $x(xy' + y - x) = 1$  sur  $]0, +\infty[$  ;

ii  $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2 On considère l'équation différentielle suivante (E) :  $y' + y^2 - \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = 0$ .

i Vérifier que  $y_0 = \frac{1}{x}$  est une solution particulière de (E) ;

ii On pose  $z = y - y_0$ . Montrer que  $z$  est solution d'une équation différentielle de type (E') :  $z' = a_1(x)z + b_1(x)z^2$ , où  $a_1(x)$  et  $b_1(x)$  des fonctions à exprimer.

iii On pose  $w = \frac{1}{z}$ . Montrer que  $w$  est solution d'une équation différentielle de type (E'') :  $a_2(x)w' + b_2(x)w = c_2(x)$ , où  $a_2(x)$ ,  $b_2(x)$  et  $c_2(x)$  des fonctions à exprimer.

iv Résoudre (E''). En déduire  $z$ , puis  $y$ .

 Exercice Complexes & Géométrie

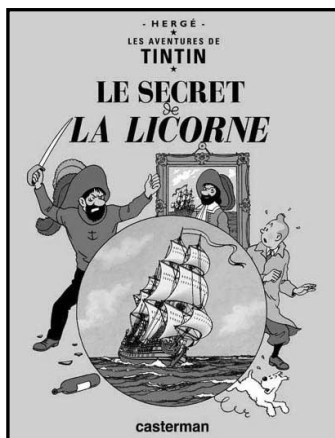
On note  $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\}$  définie par  $f(z) = \frac{iz + \alpha}{z - i}$  avec  $\alpha = 1 + 2i$ .

- Q1)** a) Vérifier que les images par  $f$  sont bien dans  $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ .  
 b) Soit  $Z \neq i$ , résoudre l'équation  $f(z) = Z$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ . Que pouvez-vous en conclure?
- Q2)** a) Déterminer la forme algébrique de  $f(z)$  pour  $z \neq i$ .  
 b) Déterminer les complexes  $z$  tels que  $f(z) \in \mathbb{R}$ . Donner une interprétation géométrique simple.  
 c) Déterminer les complexes  $z$  tels que  $f(z) \in i\mathbb{R}$ . Donner une interprétation géométrique simple.  
 d) Déterminer les complexes  $z$  tels que  $f(z) \in \mathbb{U}$ . Donner une interprétation géométrique simple.
- Q3)** a) Résoudre l'équation  $f(z) = z$  (on obtiendra deux solutions notées  $a$  et  $b$  avec  $\text{Re}(a) < \text{Re}(b)$ ).  
 b) Calculer  $\frac{a-i}{b-i}$ .  
 c) Montrer que si  $z \notin \{i; a\}$  alors  $\frac{b-f(z)}{a-f(z)} = -\frac{b-z}{a-z}$ .

Dans un plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé direct, on note A le point d'affixe  $a$ , B le point d'affixe  $b$  et C le point d'affixe  $i$  (on remarquera que A, B, C sont alignés). Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$  on note M le point d'affixe  $z$  et M' le point d'affixe  $f(z)$ . On admettra que quatre points distincts du plan A, B, C, D sont sur une même droite **ou** sur un même cercle si et seulement si il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) + k\pi$ .

- Q4)** a) Montrer que si  $M \notin \{A, B, C\}$  alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + k\pi$ . Que peut-on en déduire géométriquement pour M' ?  
 b) Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) = 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) + 2k\pi$ .  
 c) En déduire une construction géométrique simple de M' lorsque M n'est pas sur la droite (AB). Faire une figure.

Exercice Defi-Bonus : l'ingme de Tintin



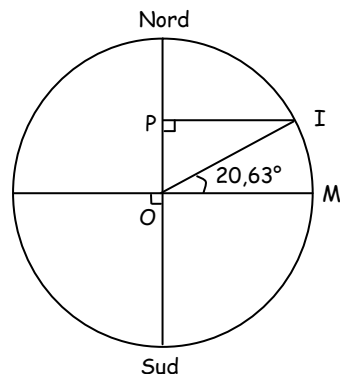
© Hergé/Moulinart [1943]

6°) On considère que la Terre est une sphère de rayon 6378 km.

- a) Montrer que (PI) et (MO) sont parallèles.  
 b) Déterminer la mesure de l'angle  $\widehat{PIO}$ . Justifier la réponse.  
 c) Calculer le rayon PI du parallèle qui passe par l'île (arrondi au km près).  
 d) En déduire la longueur de ce parallèle (arrondi au km près).



© Hergé/Moulinart [1943]



EL Biha Sup  
Prepas MPSI  
Pc. MAMOUNI

DS 2 (Partie I)  
Corrigé

Q1)  
a) il faut mg  $z \neq i \Rightarrow f(z) \neq i$

$$\text{Si on } \frac{iz + \alpha}{z - i} = i$$

$$\Rightarrow iz + \alpha = iz + 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ (impossible)}$$

b)  $f(z) = z \Leftrightarrow \frac{iz + \alpha}{z - i} = z$

$$\Leftrightarrow iz + \alpha = z(z - i)$$

$$\Leftrightarrow z(i - z) = -\alpha - zi$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-\alpha - zi}{i - z}$$

l'eq admet sol unique

Q2)

a)  $f(z) = \frac{iz + \alpha}{z - i} = \frac{ix - y + \alpha}{x + i(y - 1)}$

$$= \frac{(ix - y + \alpha)(x - i(y - 1))}{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$= \frac{-yx + \alpha x + xy - x + i(x^2 - (y - 1)(\alpha - y))}{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$= \frac{(x - 1)x + i(x^2 + y^2 - (\alpha + 1)y + \alpha)}{x^2 + (y - 1)^2}$$

b)  $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - (\alpha + 1)y + \alpha = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\alpha + 1}{2}\right)^2 + \alpha - \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\alpha + 1}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\alpha + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2$$

Circle  $\Leftrightarrow M \Omega = R$  ou  $M(x, y)$   
 $\Leftrightarrow |z - w| = R$  ou  $\Omega(0, \frac{\alpha + 1}{2})$

Q2) c)  $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow z \in (0y)$

d)  $f(z) \in U \Leftrightarrow |f(z)| = 1$

$\Leftrightarrow \left| \frac{iz + \alpha}{z - i} \right| = 1$

$\Leftrightarrow |iz + \alpha| = |z - i|$

$\Leftrightarrow |z - \alpha| = |z - i|$

$\Leftrightarrow MA = MB$   
 ~~$A(\alpha)$  et  $B(i)$~~

perchature

Q3)  $f(z) = z \Leftrightarrow \frac{iz + \alpha}{z - i} = z$

$\Leftrightarrow z^2 + 2iz - \alpha = 0$

$\Delta = (2i)^2 + 4\alpha = -4 + 4\alpha = 8i$

$\Delta = 4(1+i)^2 \quad \leftarrow 2i = (1+i)^2$

$\Delta = (2(1+i))^2$

$a = -i - (1+i), \quad b = -i + (1+i)$

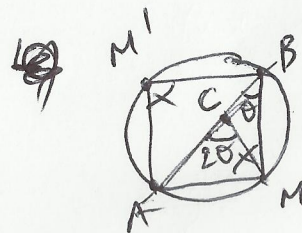
$a = -1 - 2i, \quad b = 1$

(2)

b)  $\frac{a-i}{b-i} = \frac{-1-3i}{1-i} = -\frac{(1+3i)(1+i)}{2}$   
 $= 1 - 2i = \bar{a}$

c)  $\frac{b-f(z)}{a-f(z)} = \frac{-1-2i - \frac{iz+\alpha}{z-i}}{1 - \frac{iz+\alpha}{z-i}} = \dots$

Q4) a) il suffit de passer à l'argument dans Q3-c



$M'$  circulaire avec  $A, M, B$  car le rapport est réel

b) découle du théorème de l'angle au centre

c) voir figure

FIN