

DS 2 (Part II). Durée : 2 heures

## Ensembles & Applications

### Relations Binaires

Mercredi 22 Novembre 2017

#### Niveau 1 : Questions de Cours

Compléter les formules suivantes :

- 1)  $\overline{A \cup B} = \dots, \overline{A \cap B} = \dots ;$
- 2)  $A \Delta B = \dots ;$
- 3)  $1_{A \cap B} = \dots, 1_{A \cup B} = \dots ;$
- 4)  $y \in f(A) \Leftrightarrow \dots x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow \dots ;$
- 5)  $f(A \cap B) = \dots f^{-1}(A \cap B) = \dots ;$

Rappeler les définitions suivantes :

- 6) Relation réflexive, transitive ;
- 7) Relation symétrique, anti-symétrique ;
- 8) Relation d'ordre, relation d'équivalence ;
- 9) Classe d'équivalence ;
- 10) Ordre total, ordre partiel.

#### Niveau 2 : Exercices d'application

A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :

- 1)  $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset).$
- 2)  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$
- 3)  $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B.$
- 4)  $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B.$
- 5) Soit  $\mathcal{R}$  la relation définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x e^y = y e^x.$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}$ . Pour chaque réel  $x$ , préciser le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de  $x$ .

 Niveau 3 : Problème

On appelle  $\mathcal{A}$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Le sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  formé des bijections de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est noté  $\mathcal{B}$ . On définit la relation de conjugaison de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{A}$  par

$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow (\exists h \in \mathcal{B}) g = h \circ f \circ h^{-1}$$

On note alors  $f \sim g$  pour  $f \mathcal{R} g$ , et on dit que  $f$  et  $g$  sont conjuguées. Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de la conjugaison.

**1. Propriétés générales :**

- a) montrer que la relation de conjugaison est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{A}$ .
- b) Déterminer la classe de  $f$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments  $g$  de  $\mathcal{A}$  pour lesquels  $f \sim g$  dans le cas où :

- i.  $f$  est l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$  que l'on notera  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  par la suite
- ii.  $f$  est l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{cases}$

- c) Soit  $f$  un élément donné de  $\mathcal{A}$ .
  - i. Dans le cas général peut-on affirmer :

$$f = h \circ f \circ h^{-1} \Leftrightarrow h = \text{id}_{\mathbb{R}}$$

- ii. Soit  $\mathcal{C}_f$  l'ensemble des éléments  $h$  de  $\mathcal{B}$  tels que  $f = h \circ f \circ h^{-1}$ .  
Montrer que pour tout  $h \in \mathcal{C}_f$ ,  $h^{-1} \in \mathcal{C}_f$ , et que pour tout  $(h_1, h_2) \in \mathcal{C}_f \times \mathcal{C}_f$ ,  $h_2 \circ h_1 \in \mathcal{C}_f$ .
- iii. Quelle propriété peut-on alors énoncer (et démontrer) concernant  $(\mathcal{C}_f, \circ)$  ?

**Pour toute la suite de I,  $f$  et  $g$  désignent deux éléments conjugués de  $\mathcal{A}$ .**

- d) Prouver les équivalences :
  - i.  $f$  est injective  $\Leftrightarrow g$  est injective.
  - ii.  $f$  est surjective  $\Leftrightarrow g$  est surjective.
- e) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f^n$ , la composée  $n^{\text{ième}}$  de l'application  $f$ , c'est-à-dire  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ .
  - i. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^n \sim g^n$ .
  - ii. Montrer que si  $f \in \mathcal{B}$ , alors il en est de même de  $g$ , et que de plus  $f^{-1} \sim g^{-1}$ .
- f) On rappelle que  $a \in \mathbb{R}$  est un point fixe pour  $a$  lorsque  $f(a) = a$ .
  - i. Montrer que si  $f$  possède un point fixe, alors  $g$  en possède un également. Etablir une bijection entre l'ensemble des points fixes de  $f$  et l'ensemble des points fixes de  $g$ .
  - ii. Les applications  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x - 1 \end{cases}$  sont-elles conjuguées ?
  - iii. Même question lorsque  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x+1} - 1 \end{cases}$ .

**2. Fonctions sinus et cosinus :**

Dans cette partie, on cherche à savoir si les applications sinus et cosinus sont conjuguées ou non. Pour cela on suppose qu'il existe  $h \in \mathcal{B}$  tel que  $\sin = h \circ \cos \circ h^{-1}$ .

- Montrer que  $h([-1, 1]) = [-1, 1]$ .
- Etudier l'injectivité de la restriction à  $[-1, 1]$  des applications  $\cos$  et  $h^{-1} \circ \sin \circ h$ .
- Conclure.

3. Une conjuguée de  $2x\sqrt{1+x^2}$  :

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , puis dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^z - e^{-z} = u$ , où  $u$  désigne un paramètre réel.
- En déduire que l'application  $sh$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , dont on exprimera la bijection réciproque à l'aide des fonctions usuelles.
- Montrer enfin que les applications  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x\sqrt{1+x^2} \end{cases}$  sont conjuguées.



El Bilal Sup  
Prepas MPSE  
R. MATOUNI

DS 2 (Part II)  
Conige

Probleme (Niveau 3)

1) a)  $\rightarrow f$  Rf car  $h = id$

$$\begin{aligned} \rightarrow f R g &\Rightarrow g = h \circ f \circ h^{-1} \\ &\Rightarrow f = h^{-1} \circ g \circ (h^{-1})^{-1} \\ &\Rightarrow g R f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{matrix} f_1 R f_2 \\ f_2 R f_3 \end{matrix} &\Rightarrow \begin{matrix} f_2 = h_1 \circ f_1 \circ h_1^{-1} \\ f_3 = h_2 \circ f_2 \circ h_2^{-1} \\ = h_2 \circ h_1 \circ f_1 \circ h_1^{-1} \circ h_2^{-1} \\ = h_2 \circ h_1 \circ f_1 \circ (h_2 \circ h_1)^{-1} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) g \in \overset{\circ}{\mathcal{C}} &\Leftrightarrow g = h \circ id \circ h^{-1} = id \\ g \in \underset{\circ}{\mathcal{C}} &\Leftrightarrow g = h \circ o \circ h^{-1} = o \end{aligned}$$

a) i) Non  $f = h \circ f \circ h^{-1}$   
 $\Leftrightarrow h \circ f = h \circ f$

ii)  $h \in \mathcal{C} \Rightarrow f = h \circ f \circ h^{-1}$   
 $\Rightarrow h^{-1} \circ f \circ h = f$   
 $\Rightarrow f^{-1} \circ f \circ (h^{-1})^{-1} = f$   
 $\Rightarrow h^{-1} \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} h_1, h_2 \in \mathcal{C} &\Rightarrow \begin{matrix} f = h_1 \circ f \circ h_1^{-1} \\ f = h_2 \circ f \circ h_2^{-1} \end{matrix} \\ &\Rightarrow f = h_2 \circ h_1 \circ f \circ h_1^{-1} \circ h_2^{-1} \\ &\Rightarrow f = (h_2 \circ h_1) \circ f \circ (h_2 \circ h_1)^{-1} \\ &\Rightarrow h_2 \circ h_1 \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

(1)

d)  $g = h \circ f \circ h^{-1}$  inj or  $f$  inj  
 surj or  $f$  surj  
 car  $h$  et  $h^{-1}$  sont bij

e) i) par récurrence  
 $f \sim g \Rightarrow \bar{g} = h \circ f \circ h^{-1}$   
 $\Rightarrow g^2 = \bar{g} \circ \bar{g} = h \circ f \circ h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1}$   
 $\Rightarrow g^2 = h \circ f^2 \circ h^{-1}$   
 $\Rightarrow f \sim g^2$   
 et ainsi de suite

ii)  $f \sim g \Rightarrow g = h \circ f \circ h^{-1}$   
 $\Rightarrow g^{-1} = (h^{-1})^{-1} \circ f^{-1} \circ h^{-1}$   
 $\Rightarrow f^{-1} \sim g^{-1}$

f) i)  $g = h \circ f \circ h^{-1}$   
 $g(h(a)) = h \circ f \circ h^{-1} \circ h(a)$   
 $= h \circ f(a) = h(a)$   
 donc a pt fixe de  $f \Rightarrow h(a)$  pt fixe pour  $g$

et  $h: \{ \text{pt fixe de } a \} \rightarrow \{ \text{pt fixe de } g \}$   
 est une bij

ii) ~~pas~~ pas de pt fixe pour  $f$   
 mais 0 pt fixe pour  $g$   
 donc  $f \sim g$  impossible

2) a)  $\sin = h \circ \cos \circ h^{-1}$   
 $\Rightarrow \sin h = \cos = h^{-1}$   
 $\Rightarrow h(\sin \mathbb{R}) = \cos(h^{-1}(\mathbb{R}))$   
 $= h(0, 1) = (0, 1)$

b)  $\cos$  non inj ~~sur~~  $\sin(-1, 1) \subset (-\pi/2, \pi/2)$   
 $\sin$  inj  $\sin(-1, 1) \subset (-\pi/2, \pi/2)$   
 donc  $h^{-1} \circ \sin \circ h$  inj  
 donc  $\cos \mathbb{R} \sin$  impossible.

(2)