

Concours Blanc (Durée : 4 heures)

Réels & Suites

Relations Binaires

Lundi 04 Décembre 2017

Niveau 1 : Questions de Cours

10 points

1 Compléter les formules suivantes :

i $\sup(A \cup B) \dots \dots \sup(A \cap B) \dots \dots ;$

ii $\inf(A \cup B) \dots \dots, \inf(A \cap B) \dots \dots ;$

iii $u_n < v_n \text{ à PCR} \Rightarrow \lim u_n \dots \lim v_n ;$

iv $\lim u_n < \lim v_n \Rightarrow u_n \dots v_n \text{ à PCR} ;$

2 Énoncer la propriété caractéristique de la borne supérieure ;

3 Énoncer la propriété caractéristique de la borne inférieure ;

4 Énoncer le théorème de la limite monotone ;

5 Énoncer le théorème d'encadrement des limites finies ;

6 Énoncer le théorème d'encadrement des limites infinies ;

Niveau 2 : Exercices d'application

10 points

1 Montrer que :

1. pour tous réels positifs a et b on a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$;

2. pour tous réels a et b on a $\sqrt{|a-b|} \geq |\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}|$.

On étudiera les cas d'égalité.

2

1. Montrer que pour tous réels x, y on a :

$$(x+y)^2 \geq 4xy.$$

2. Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c , on a

$$(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc.$$

3. En déduire que $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$.

**MATH
PROBLEMS?**

Call

1-800-[(10x)(13i)^2]-[sin(xy)/2.362x]

by U2-Graphics.com

 Niveau 3 : Problème 1

15 points

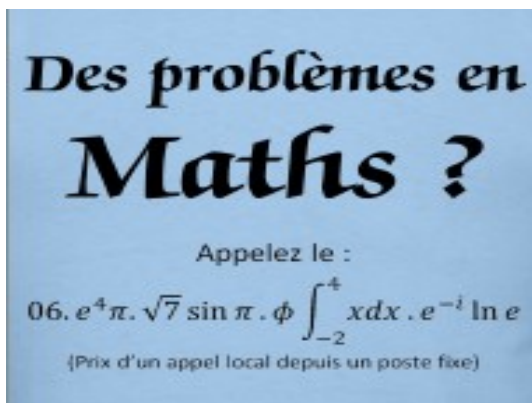
Le but de ce problème est de démontrer sans utiliser le théorème de la bijection que $x \mapsto x^n$ est une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+

1. **Injectivité de $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$**

- a) Factoriser $(x^n - y^n)$.
- b) En déduire que φ est injective

2. **Surjectivité de φ : Soit $a \in \mathbb{R}_+$**

- a) Réduction du problème :
 - i. Montrer que si $a \in \{0, 1\}$, alors a possède un antécédent par φ
 - ii. Montrer que si on a démontré que tout réel $a > 1$ possède un antécédent par φ , alors φ surjective.
- b) On suppose donc maintenant que $a > 1$, et on pose $A = \{x \in \mathbb{R}_+ ; x^n \geq a\}$.
Montrer que A possède une borne inférieure que l'on notera α
- c) On fait dans un premier temps l'hypothèse $\alpha^n < a$
 - i. Montrer que si $0 < \theta < 1$, alors $(\alpha + \theta)^n < \alpha^n + \theta M$ où $M = \sum_{k=1}^n C_n^k \alpha^{n-k}$
 - ii. En déduire qu'il existe un réel $\beta > \alpha$ tel que $\beta^n < a$
 - iii. Montrer que β est un minorant de A
 - iv. Mettre en évidence une contradiction.
- d) On suppose maintenant que $\alpha^n > a$
 - i. Montrer que si $0 < \theta < 1$, alors $(\alpha - \theta)^n \geq \alpha^n - \theta M$ avec $M = \sum_{k=1}^n C_n^k \alpha^{n-k}$
 - ii. En déduire qu'il existe un réel $\beta < \alpha$ tel que $\beta^n > a$
 - iii. Mettre en évidence une contradiction.
- e) Conclure.



La fonction exponentielle réelle par les suites adjacentes

- Pour tout réel $t > -1$, et pour tout entier $n \geq 2$, vérifier que $(1+t)^n \geq 1+nt$. Plus précisément, on prouvera qu'il y a égalité si et seulement si $t = 0$.
- Dans cette question, x est un réel quelconque, mais **fixé**.

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Pour $n > |x|$, on pose $v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

- En utilisant la question précédente, montrer que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante. Plus précisément, montrer que cette monotonie est stricte si x est non nul.
 - Étudier de même la monotonie de la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$.
 - Pour tout $n > |x|$, prouver l'encadrement $0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x) \frac{x^2}{n}$.
En déduire que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.
- Pour tout x de \mathbb{R} , on note $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x)$.
Il reste à montrer qu'on obtient ainsi une définition de la fonction exponentielle. Vérifier que $\exp(0) = 1$, puis que $\exp(x) > 0$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$ pour tout x .
 - Dans cette question, on prouve l'égalité fondamentale $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.
 - Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle tendant vers 0. On veut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = 1$.
Montrer : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow 1 + \lambda_n \leq \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - \lambda_n}$ et conclure.
 - Pour tous x, y de \mathbb{R} , montrer que $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.
Indication : utiliser λ_n tel que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)$.
 - On prouve ici que $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et que $\exp' = \exp$.
 - Pour tout x de $] -1, 1[$, montrer que $1+x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$.
 - En déduire que l'application $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable en 0 et que $\exp'(0) = 1$.
 - Montrer que $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et que $\exp' = \exp$.
 - Dans cette question, on obtient deux limites usuelles et on montre que l'application \exp est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^{+*} .
 - Soit x dans \mathbb{R}^{+*} . Montrer que $n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ est croissante à partir de $n = 1$.
 - En déduire $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0$ pour tout n de \mathbb{N} .
 - Montrer que l'application $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^{+*} .
On note \ln ("logarithme népérien") la bijection réciproque de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} .
 - Pour tous x, y de \mathbb{R}^{+*} , montrer que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Exercice 1. : Soit H un ensemble et $E = \mathcal{P}(H)$. Soit $A \in E$ et $f : \begin{cases} E \rightarrow E \\ X \mapsto A \cup X \end{cases}$.

On suppose E muni de la relation d'ordre \subset .

1. Montrer que :

- (a) $(\forall X \in E) \quad X \subset f(X)$
- (b) f est croissante.
- (c) $(\forall X \in E) \quad f(X) = f(f(X))$

2. On introduit :

$$F = \{X \in E ; X = f(X)\}$$

et $(\forall X \in E)$, on pose

$$F_X = \{Y \in F ; X \subset Y\}$$

- (a) Déterminer F et F_X
- (b) Montrer que F_X a un plus petit élément.

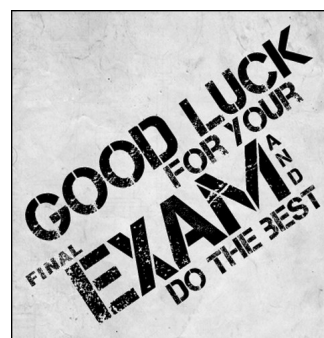
3. On suppose que $A \neq \emptyset$; f est-elle surjective ? f est-elle injective ?

Exercice 2. : Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné. Pour tout élément x de E , on définit la partie $\varphi(x) = \{t \in E, t \preceq x\}$.

1. Démontrer que $(\forall x, y \in E) \quad x \preceq y \Leftrightarrow \varphi(x) \subset \varphi(y)$.
2. Démontrer que φ est une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Est-ce une surjection ?
3. Réciproquement, soit ϕ une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. On définit la relation \mathcal{R} par :

$$(\forall x, y \in E) \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \phi(x) \subset \phi(y)$$

Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre.



Corrigé

Niveau 2 : Exercices d'application

1

1. On a :

$$\sqrt{a+b}^2 = a+b \leq a+2\sqrt{ab}+b \leq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

ce qui équivaut à $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ puisque toutes les quantités mises en jeu sont positives.

L'égalité est réalisée si, et seulement si, $a+b = a+2\sqrt{ab}+b$, ce qui équivaut à $a=0$ ou $b=0$.

2. En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{cases} \sqrt{|a|} = \sqrt{|a-b+b|} \leq \sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b|} \\ \sqrt{|b|} = \sqrt{|b-a+a|} \leq \sqrt{|a-b|} + \sqrt{|a|} \end{cases}$$

donc :

$$-\sqrt{|a-b|} \leq \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \leq \sqrt{|a-b|}$$

ce qui équivaut à :

$$\sqrt{|a-b|} \geq \left| \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \right|.$$

2

1. Pour tous réels x, y on a : $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0$.

2. Donc, pour a, b, c positifs : $(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2 \geq 4bc4ca4ab = 8^2 a^2 b^2 c^2$
et $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$.

3. En notant $S = a+b+c$, on a : $(b+c)(c+a)(a+b) = (S-a)(S-b)(S-c)$
 $= S^3 - (a+b+c)S^2 + (ab+bc+ac)S - abc$
 $= (ab+bc+ac)S - abc \geq 8abc$

soit : $(ab+bc+ac)S \geq 9abc$

et divisant par $abc > 0$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a+b+c) \geq 9.$$

On peut aussi utiliser les inégalités entre moyennes harmonique, géométrique et arithmétique (paragraphe 2.4) :

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

qui donne directement :

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a+b+c) \geq 9.$$

 Niveau 4 : Problème 2

1. Il est clair que si $t = 0$, alors on a l'égalité $(1 + t)^n \geq 1 + nt$ pour tout n .

On fixe t dans $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$ et on montre l'inégalité stricte par récurrence sur n .

— Pour $n = 2$, c'est évident car $(1 + t)^2 - (1 + 2t) = t^2 > 0$.

— Supposons donc $(1 + t)^n > 1 + nt$ pour un certain entier $n \geq 2$.

Alors $(1 + t)^{n+1} = (1 + t)(1 + t)^n > (1 + t)(1 + nt)$ (car $t + 1 > 0$ et $(1 + t)^n > 1 + nt$).

On en déduit $(1 + t)^{n+1} > 1 + (n + 1)t + nt^2 > 1 + (n + 1)t$.

Cela prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Remarque : Voici une deuxième méthode pour répondre à la question posée.

Posons $\varphi_n(t) = (1 + t)^n - 1 - nt$, avec $n \geq 2$ fixé, et $t > -1$ variable.

Pour tout $t > -1$, on a $\varphi'_n(t) = n(1 + t)^{n-1} - n$ et $\varphi''_n(t) = n(n - 1)(1 + t)^{n-2}$.

On a $\varphi''_n(t) > 0$ pour tout $t > -1$, donc φ'_n est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$.

Mais $\varphi'_n(0) = 0$, donc $\varphi'_n(t) < 0$ si $-1 < t < 0$ et $\varphi'_n(t) > 0$ si $t > 0$.

Ainsi φ est strictement décroissante sur $] -1, 0]$ et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

L'application φ_n présente donc un minimum absolu en 0. Or $\varphi_n(0) = 0$.

Conclusion : on a $\varphi_n(t) \geq 0$ si $t > -1$, avec égalité si $t = 0$ (cqfd).

2. Remarque : la condition $n > |x|$ est nécessaire pour que $v_n(x)$ soit défini.

On a en fait $1 \pm \frac{x}{n} > 0$.

(a) Pour $n > |x|$, on a $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$

On a : $0 < \frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} = 1 + t_n(x)$ où $t_n(x) = \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = -\frac{x}{(n+1)(x+n)}$.

Puisque $1 + t_n(x) > 0$, on peut utiliser (1) et écrire $(1 + t_n(x))^{n+1} \geq 1 + (n + 1)t_n(x)$.

Mais $1 + (n + 1)t_n(x) = 1 - \frac{x}{x+n} = \frac{n}{n+x} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$.

On trouve donc $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + (n + 1)t_n(x)\right)$ c'est-à-dire $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \geq 1$.

Conclusion : la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.

Plus précisément, si $x = 0$, la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est constante de valeur 1.

Si $x \neq 0$, on a $t_n(x) \neq 0$ donc $(1 + t_n(x))^{n+1} > 1 + (n + 1)t_n(x)$.

Dans ce cas, la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est strictement croissante.

(b) Il est clair que pour tout $n > |x|$, on a $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$.

Puisque la suite $(u_n(-x))_{n>|x|}$ est à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} et qu'elle est croissante (strictement si $x \neq 0$), la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante (strictement si $x \neq 0$).

(c) Pour tout $n > |x|$, on trouve :

$$v_n(x) - u_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = v_n(x) \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right].$$

Puisque $n > |x|$ donc $0 < 1 - \frac{x^2}{n^2} \leq 1$, cette inégalité donne $v_n(x) \geq u_n(x)$.

Mais $n > |x| \Rightarrow -\frac{x^2}{n^2} > -1 \Rightarrow \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$ en réutilisant la question (1).

Pour tout $n > |x|$, on en déduit la majoration $v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x) \frac{x^2}{n}$.

Mais on sait que $n \mapsto v_n(x)$ décroît à partir de $n_0 = [x] + 1$.

On en déduit $0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_{n_0}(x) \frac{x^2}{n}$ pour tout $n \geq n_0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n(x) - u_n(x)) = 0$.

Il en découle que les suites $(u_n(x))_{n > |x|}$ et $(v_n(x))_{n > |x|}$ sont adjacentes.

3. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n(0) = 1$, donc $\exp(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(0) = 1$.

Pour tout x de \mathbb{R} , et pour $n > |x|$, on a $u_n(x) \leq \exp(x)$ (monotonie de la suite u).

Mais, du fait que $n > |x|$, on a $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0$. On en déduit $\exp(x) > 0$.

Pour tout x de \mathbb{R} , et pour $n > |x|$, on a $u_n(x)v_n(-x) = 1$.

Si on fait tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité, on trouve $\exp(x)\exp(-x) = 1$.

4. (a) On choisit n_0 dans \mathbb{N}^* tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |\lambda_n| < 1$.

Pour $n \geq n_0$, on a alors $n > |\lambda_n|$ donc $\left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \geq 1 + \lambda_n$ en utilisant (1).

De même $n \geq n_0 \Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \geq 1 - \lambda_n > 0$ (changer λ_n en $-\lambda_n$, n_0 est le même).

On en déduit $\left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{n^2}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-n} \leq \left(1 - \frac{\lambda_n^2}{n^2}\right)^n \frac{1}{1 - \lambda_n} \leq \frac{1}{1 - \lambda_n}$.

On a donc obtenu l'encadrement $1 + \lambda_n \leq \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - \lambda_n}$ pour $n \geq n_0$.

Il en résulte évidemment $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = 1$.

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right) \left(1 + \frac{x+y}{n}\right) - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) = \frac{\lambda_n}{n} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right) - \frac{xy}{n^2}.$$

On peut donc écrire $\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right) \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)$ avec $\lambda_n = \frac{xy}{n+x+y}$.

Cette expression de λ_n est valable pour n assez grand et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$.

En élevant à la puissance n : $u_n(x)u_n(y) = \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n u_n(x+y)$ pour n assez grand.

Quand $n \rightarrow \infty$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = 1$, on trouve $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

5. (a) Pour tout x de \mathbb{R} , et tout $n > |x|$ on a $\exp(x) \geq u_n(x)$ (monotonie de la suite u).
 Mais $n > |x| \Rightarrow \frac{x}{n} > -1 \Rightarrow u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$ en utilisant (1).
 On obtient donc $\exp(x) \geq 1 + x$ pour tout x de \mathbb{R} , et en particulier si $-1 < x < 1$
 Ainsi $\exp(-x) \geq 1 - x$ donc $1 = \exp(-x) \exp(x) \geq (1 - x) \exp(x)$ si $-1 < x < 1$.
 Pour tout x de $] -1, 1[$, on a donc les inégalités $1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}$.
- (b) La question (5a) donne $x \leq \exp(x) - 1 \leq \frac{x}{1 - x}$, pour tout x de $] -1, 1[$.
 Donc : $1 \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}$ sur $]0, 1[$ et $\frac{1}{1 - x} \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq 1$ sur $] -1, 0[$.
 De toutes façons, on voit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.
 Ainsi l'application \exp est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$.
- (c) Fixons x_0 dans \mathbb{R} . $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} = \exp(x_0) \frac{\exp(h) - 1}{h}$.
 Puisque $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$, on trouve $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} = \exp(x_0)$.
 Ainsi l'application $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable en x_0 et $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$.
 Conclusion : l'application \exp est dérivable sur \mathbb{R} et $\exp' = \exp$.
6. (a) Si $x > 0$, ce qui a été fait en (2a) pour la suite $n \mapsto u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ est en effet possible à partir de $n = 1$.
 On en déduit l'inégalité $\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour tout n de \mathbb{N}^* .
- (b) Si on fixe n dans \mathbb{N} , et pour x strictement positif, on a $\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$.
 Il en découle $\exp(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ donc $\frac{\exp(x)}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$ pour tout $x > 0$.
 Ainsi $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$.
 On en déduit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp(-x)}{(-x)^n} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0$.
- (c) Pour tout x de \mathbb{R} , on a $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.
 L'application continue $x \mapsto \exp(x)$ est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .
 Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur son intervalle image.
 Mais, d'après (I.6b), avec $n = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.
 L'application \exp est donc un bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^{+*} .
- (d) On a : $\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln(x)) \exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y))$.
 Compte tenu de l'injectivité de \exp , il en résulte $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Niveau 3 : P1

1) a) $x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} = (x-y)S$

b) $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x^n = y^n \Rightarrow (x-y)S = 0$
 $\Rightarrow x = y$

2) a) i) $1 = \varphi(1)$
 $0 = \varphi(0)$

ii) $y = 1 = \varphi(1)$

$y < 1 \Rightarrow a = \frac{1}{y} > 1 \Rightarrow a = \varphi(x) = x^n$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = x^n \Rightarrow y = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$

donc $y = \varphi(x)$ admet $\forall x$ ds
 son cod φ sur.

b) $a^n \in A \neq \emptyset$

A minorée par 0 donc $\alpha = \inf A$ existe

c) i) $(x+\theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \theta^k x^{n-k}$

$= x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \theta^k x^{n-k} < x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k}$
 car $\theta < 1$

ii) $x^n < a \Rightarrow \exists \theta$ très petit tq
 $x^n + \theta M < a$

prendre $\theta < \frac{a-x^n}{M}$ et $\beta = x + \theta > x$

donc $\beta^n = (x+\theta)^n < x^n + \theta M < a$

iii) $x \in A \Rightarrow x^n \geq a > \beta^n \Rightarrow x > \beta$ ~~qfd~~

iv) β minorant de $A \Rightarrow \beta \leq \alpha = \inf A$

plus grand
 ds minorant

absurde

car $\beta > \alpha$

d) Même technique remplaçant θ
 par $-\theta$

e) selon c) et d) $x^n < a$ et $x^n > a$
 impossible donc $a = x^n = \varphi(x) \Rightarrow \varphi$ sur

Niveau 5

Ex 01

1) a) $f(x) = Ax \supset X$

b) $X \subset Y \Rightarrow Ax \subset Ay$
 $\Rightarrow f(x) \leq f(y)$

c) $f(f(x)) = f(Ax) = A(Ax)$
 $= Ax$
 $= f(x)$

2) a) $X \in F \Leftrightarrow X = f(x)$
 $\Leftrightarrow X = Ax$
 $\Leftrightarrow A \subset X$

b) $Y \in F_x \Leftrightarrow Y \in F$ et $X \subset Y$
 $\Leftrightarrow A \subset X \subset Y$

b) $\min F_x = X$

3) $Y = Ax$ n'admet pas de sol \Rightarrow non surj
 $Ax = Ax' \nRightarrow X = X'$ donc non inj

Ex 02

1) $t \in \varphi(x) \Rightarrow t \leq x \wedge x \leq y$
 $\Rightarrow t \leq y$
 $\Rightarrow t \in \varphi(y)$

2) $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

3) $x R x$ evident car $\varphi(x) = \varphi(x)$
 $x R y \Rightarrow \varphi(x) \subset \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$
 $y R x \Rightarrow \varphi(y) \subset \varphi(x)$

$x R y \Rightarrow \varphi(x) \subset \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) \subset \varphi(z)$
 $y R z \quad \varphi(y) \subset \varphi(z) \Rightarrow x \leq z$

$\xrightarrow{f \circ \varphi}$
f o v