Devoir Surveillé (4 heures)

Fonctions Réelles

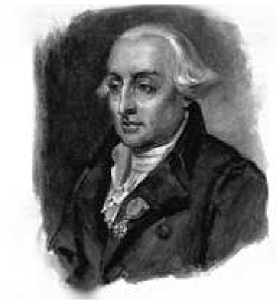
Suites Numériques

Mercredi 17 Janvier 2018

Calculatrices Non Autorisées

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Mathématicien, mécanicien et astronome italien. Fondateur du calcul des variations et de la théorie des formes quadratiques. En physique, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique grâce aux multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie.



Niveau 1 (5 points) : Question de Cours & Exercices d'application

1. Rappeller l'énoncé du théorème des accroissement finies
2. Rappeller la formule de Taylor avec reste intégrale
3. Rappeller la définition de suites adjacentes
4. Soit (u_n) la suite définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 \in]0,4[$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.
   1. Montrer que (u_n) est croissante.

      Indication : Penser à une recurrence forte à deux pas
   2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

      Indication : Penser à une recurrence forte à deux pas, pour montrer que la suite est majorée par 4

Niveau 2 (5 points) : Exercice 1

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right].$$

2. Soient $0 < b_0 \leqslant a_0$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ les deux suites définies par

$$\forall n \geqslant 0 \ , \ a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big[a_n + b_n\Big]$$

et

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right].$$

Montrer que $\forall n \geqslant 0$,

$$b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n.$$

3. Montrer que $\forall n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \frac{a_0 - b_0}{2^n}.$$

4. En déduire que les deux suites sont adjacentes.
5. Calculer $a_n b_n$ puis en déduire la valeur de la limite commune des deux suites.

Niveau 2 (5 points) : Exercice 2

Posons pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Montrer que P_n possède une unique racine sur l'intervalle $[0,1]$ que l'on notera u_n.
2. Déterminer le signe de $P_n(u_{n+1})$. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on précisera.
4. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

Niveau 3 (5 points) : Exercice 3

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$\begin{cases} \bullet \quad u_0 \in [0,1] \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{1-u_n}} \end{cases}$$

On note $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$$

1. Étudiez les variations de f et donner son graphe. En déduire que la suite (u_n) est bien définie.

2. Étudiez sur $[0,1]$ le signe de la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$.
Indication : vous pourrez remarquer que le signe de $h(x)$ est le même que celui de $(1-x)^2 - x(1-x)$.

3. Quelles sont les limites possibles pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

4. On suppose que $u_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$. Montrez que la suite (u_n) converge et précisez la valeur de sa limite.

5. Montrez que pour tout $u_0 \in [0,1]$, la suite (u_n) converge et précisez la valeur de sa limite en fonction de u_0.

Niveau 4 (5 points) : Exercice 4

Soient $n \geqslant 0$ et

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

On définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ par $x_1 > 0$ et

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_{n+1} = f_n(x_n).$$

1. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

2. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $x_n \leqslant 1/n$.

3. Montrer que $(nx_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

4. Montrer que $\forall n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \leqslant 1.$$

5. Trouver un équivalent de x_n.

Niveau 4-5 (15 points) : Problème

Partie I. Théorème de Rolle

1. COURS —. Énoncez le théorème de Rolle.

2. Soit $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b[$. On suppose que $g(a) = g(b) = 0$ et $g'(a) = 0$. Montrez qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(c)}{c-a}$.

Partie II. Théorème des Accroissements Finis

1. COURS —. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Énoncez l'égalité des accroissements finis entre a et b.

2. Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable dans $\mathbf{R}^+$. On suppose en outre que f' est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ f'(x) \geqslant 0$.

a. Montrez que $\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$.

b. Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(k)$. Montrez que (s_n) est convergente *si et seulement si* f a une limite réelle, notée ℓ, en $+\infty$.

c. Application : étudiez les suites définies par $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$.

Partie III. Formule de Taylor pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $b \in \mathbf{R}$, un réel fixé. On définit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = g(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}\, g^{(k)}(x) + C\,\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{où } C \text{ est un réel fixé.}$$

1. Montrez que φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi'(x) = -\dfrac{(b-x)^n}{n!}\left[g^{(n+1)}(x) + C\right]$.

2. Formule de Taylor Soit $a \in \mathbf{R}$ un réel fixé. En choisissant «*judicieusement*» la constante C, montrez l'existence d'un réel c compris entre a et b tel que

$$g(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, g^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, g^{(n+1)}(c)$$

3. Application : soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées et on pose $M_0 = \sup\limits_{\mathbf{R}} |f|$ et $M_2 = \sup\limits_{\mathbf{R}} |f''|$.

a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrez que pour tout $h \in \mathbf{R}$, on a

- $-f(x) \leqslant M_0 + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2} M_2$
- $f(x) \leqslant M_0 + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2} M_2$

Indication : appliquez la formule de Taylor ci-dessus entre x et $x+h$ d'une part, et x et $x-h$ d'autre part.

b. Déduisez-en que f' est bornée sur $\mathbf{R}$ et que si l'on note $M_1 = \sup\limits_{\mathbf{R}} |f'|$, on a $M_1^2 \leqslant 2\,M_0 M_2$.

FIN

Corrigé

Niveau 1 (5 points) : Question de Cours & Exercices d'application

1. Soit $\mathrm{HR}(n)$ l'hypothèse de récurrence $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n$.
   On a $u_2 = \sqrt{u_1} \geqslant u_1$ car $u_1 \in]0,1[$. Ainsi $\mathrm{HR}(2)$ est vérifiée.
   Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie pour un certain $n \geqslant 2$. Alors $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-2}} \geqslant 0$ d'après notre hypothèse de récurrence. Donc $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.
   On en déduit que (u_n) est croissante.

   > **Remarque.** On est obligé d'initialiser au rang 2 car l'étape d'hérédité $\mathrm{HR}(n) \Rightarrow \mathrm{HR}(n+1)$ fait intervenir u_{n-2}.

2. Montrons par récurrence double que (u_n) est majorée par 4. On a bien $u_0 \leqslant 4$ et $u_1 \leqslant 4$. Supposons que $u_n \leqslant 4$ et $u_{n+1} \leqslant 4$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+2} \leqslant \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$.

   > **Remarque.** Comment trouver le majorant ? On choisit un majorant M qui nous arrange i.e. tel que $\sqrt{M}+\sqrt{M} \leqslant M$. On vérifie ensuite qu'il convient.

   (u_n) est croissante et majorée donc elle converge. Par continuité de la racine carrée, sa limite l vérifie $l = \sqrt{l} + \sqrt{l}$ donc $l = 4$.

Niveau 2 (5 points) : Exercice 1

1. Soient a et b strictement positifs , on remarque que
$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$
   si et seulement si
$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{2ab}$$
   ie
$$4ab \leqslant (a+b)^2$$
   soit encore
$$0 \leqslant (a-b)^2.$$
   La dernière inégalité étant acquise , le résultat est démontré.
2. Par une récurrence immédiate , on a $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$a_n > 0 \quad \text{et} \quad b_n > 0.$$
   Les deux suites sont donc bien définies. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$a_{n+1} \leqslant a_n$$
   si et seulement si
$$b_n \leqslant b_{n+1}$$
   si et seulement si
$$b_n \leqslant a_n.$$
   Il suffit donc de démontrer les inégalités
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \leqslant a_n.$$

- Montrons le cas $n=0$: c'est l'hypothèse $b_0 \leqslant a_0$ de l'énoncé.
- Montrons les cas $n \geqslant 1$; on a alors $n-1 \geqslant 0$, d'où , en appliquant le résultat de la question **a.** pour $a = a_{n-1}$ et $b = b_{n-1}$,

$$\frac{2}{a_{n-1}+b_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b_{n-1}}\right)$$

soit encore

$$\frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{b_n},$$

c'est-à-dire

$$b_n \leqslant a_n$$

puisque $a_n > 0$.

3. Démontrons l'inégalité par récurrence sur n. Notons , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_n$ la proposition :

$$0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \frac{a_0 - b_0}{2^n}.$$

- $\mathcal{I}_0$ est vérifiée puisque $0 \leqslant a_0 - b_0 \leqslant a_0 - b_0$.
- Montrons que la propriété $\mathcal{I}_n$ est héréditaire. Supposons $\mathcal{I}_n$ vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \\ &= \frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)} \\ &= \frac{a_n-b_n}{2} \times \frac{a_n-b_n}{a_n+b_n} \end{aligned}$$

Or , on a démontré à la question **c.** que

$$a_n - b_n \geqslant 0,$$

d'où

$$0 \leqslant \frac{a_n-b_n}{a_n+b_n} \leqslant \frac{a_n}{a_n+b_n} \leqslant 1$$

puisque $a_n > 0$ et $b_n > 0$ ainsi

$$0 \leqslant a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

$\mathcal{I}_{n+1}$ est donc vérifiée.

- D'après le principe de récurrence , l'inégalité $\mathcal{I}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après le résultat de la question **b.** , $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante , de plus , on déduit de l'inégalité établie à la question **c.** et du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = a_nb_n.$$

la suite $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante. Soit ℓ la limite commune de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_nb_n = a_0b_0,$$

$\ell^2 = a_0b_0$, , et par passage à la limite dans l'inégalité

$$a_n \geqslant 0,$$

on a $\ell \geqslant 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{a_0b_0}.$$

Niveau 2 (5 points) : Exercice 2

1. Etudions les variations de P_n sur $[0,1]$. La fonction polynôme P_n est continue sur $[0,1]$ or $P_n(0)=1$ et $P_n(1)=2-n\leqslant 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de conclure qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $P_n(c)=0$. P_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x\in[0,1[$,
$$P'_n(x)=n(x^{n-1}-1)<0.$$
La fonction polynôme P_n est donc strictement décroissante sur $[0,1]$, il existe donc une unique racine u_n de P_n sur $[0,1]$.
2. Pour tout $n\geqslant 2$, $P_n(u_{n+1})=u_{n+1}^n-nu_{n+1}+1$. Or $P_{n+1}(u_{n+1})=0$ i.e. $u_{n+1}^{n+1}-(n+1)u_{n+1}+1=0$ et donc $nu_{n+1}=u_{n+1}^{n+1}-u_{n+1}+1$. On en déduit que
$$P_n(u_{n+1})=u_{n+1}^n-u_{n+1}^{n+1}+u_{n+1}=u_{n+1}^n(1-u_{n+1})+u_{n+1}$$
Puisque $u_{n+1}\in[0,1]$, $P_n(u_{n+1})\geqslant 0$. Or P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ et $P_n(u_n)=0$ donc $u_{n+1}\leqslant u_n$.
3. Pour tout $n\geqslant 2$,
$$nu_n-1=u_n^n\leqslant 1,$$
d'où
$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{2}{n}$$
ainsi , d'après le théorème d'encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0.$$
4. On reprend l'encadrement de la question précédente,
$$0\leqslant nu_n-1\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^n,$$
on a donc d'après le théorème d'encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty}(nu_n-1)=0$$
et ainsi
$$u_n\sim\frac{1}{n}.$$

Niveau 3 (5 points) : Exercice 3

1. f est continue sur $[0,1]$ comme quotient de telles fonctions. En outre, elle est rérivable dans $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}) - \sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)}{(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})^2} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation suivant

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1
$h(x)$		$+$	0	$-$	

En particulier, on observe que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f, en conséquence, la suite (u_n) est bien définie à valeurs dans $[0,1]$.

2. Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} - x = \frac{\sqrt{x} - x(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{(1-x)\sqrt{x} - x\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

Ainsi, $h(x) > 0 \iff \sqrt{1-x} - \sqrt{x} \iff x < \frac{1}{2}$.

3. Les limites possibles pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont les points fixes de f dans $[0,1]$, à savoir, 0, $\frac{1}{2}$, 1.

4. On suppose que $u_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$.

- L'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$ est stable, donc $(u_n) \in]\frac{1}{2}, 1[^{\mathbf{N}}$.
- $h \leqslant 0$ sur cet intervalle, donc (u_n) est décroissante.
- Finalement, (u_n) est **Li-Mo** convergente vers sa borne inférieure. Comme 1 n'est pas un minorant, (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

5. On suppose que $u_0 \in]0, \frac{1}{2}[$.

- L'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ est stable, donc $(u_n) \in]0, \frac{1}{2}[^{\mathbf{N}}$.
- $h \geqslant 0$ sur cet intervalle, donc (u_n) est croissante.
- Finalement, (u_n) est **Li-Mo** convergente vers sa borne supérieure. Comme 0 n'est pas un majorant, (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Enfin, si $u_0 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ alors la suite est stationnaire égale à u_0 (point fixe de f.) Dans tous les cas, on a bien établi la convergence de (u_n) vers l'un des points fixes de f. ▲

Niveau 4 (5 points) : Exercice 4

1. Par une récurrence immédiate , on prouve que $\forall n \geqslant 1$, $x_n > 0$. On a donc, $\forall n \geqslant 1$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2} \leqslant x_n.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell > 0$. Alors, $\forall n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant x_{n+1} \leqslant \frac{x_1}{1+n\ell^2},$$

et d'après le théorème d'encadrement,

$$\ell = 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

2. Prouvons la propriété par récurrence sur $n \geqslant 2$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $x(1-x) \leqslant 1/4$, on a

$$x_2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Supposons l'inégalité vérifiée au rang $n \geqslant 2$. Alors $1 - x_n \geqslant 0$ et donc

$$nx_n(1-x_n) \leqslant (1-x_n),$$

ainsi

$$(n+1)x_{n1} \leqslant 1,$$

et la propriété est acquise au rang $n+1$.

3. On remarque que $\forall n \geqslant 1$,

$$\frac{(n+1)x_{n+1}}{nx_n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{1+nx_n^2} \geqslant 1$$

si et seulement si

$$n^2x_n^2 \leqslant 1,$$

ce qui est vrai d'après la question **2.** Puisque $\forall n \geqslant 1$, on en déduit que la suite de terme général nx_n est croissante.

4. On remarque que $\forall n \geqslant 2$ et $\forall k \leqslant n$,

$$1 \geqslant (k-1)x_{k-1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k-1}}.$$

D'où, en additionnant membre à membre ces $n-1$ inégalités et après telescopage,

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} \leqslant n-1,$$

puis,

$$n \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant n - 1 + \frac{1}{x_1},$$

donc

$$\frac{1}{x_n} \sim n,$$

et ainsi

$$x_n \sim \frac{1}{n}.$$

Niveau 4-5 (15 points) : Problème

Partie I. Théorème de Rolle

1. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a<b$.
Soit $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ une fonction continue dans $[a,b]$, dérivable dans $]a,b[$.
On suppose que $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

2. Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ tel que $a<b$. Soit $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b[$. On suppose que $g(a)=g(b)=0$ et $g'(a)=0$.
On introduit la fonction $h:[a,b]\to\mathbf{R}$ définie par

$$\forall x\in[a,b], h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x-a} & \text{si } x>a\\ 0=g'(a) & \text{si } x=a\end{cases}$$

Comme h est continue dans $]a,b]$, h l'est aussi. ✐ De plus, comme g est dérivable en a, h est continue au point a. De plus, comme g est dérivable dans $]a,b[$, h l'est aussi et

✐ *en vue d'appliquer le théorème de Rolle à h, on vérifie que les hypothèses sont satisfaites !*

$$\forall x\in]a,b[, h'(x)=\frac{g'(x)(x-a)-g(x)}{g(x)^2}$$

Finalement, observons que $h(a)=h(b)=0$. Nous pouvons conclure à l'aide du **théorème de Rolle** à l'existence d'un réel $c\in]a,b[$, tel que $h'(c)=0$, ce qui revient à dire que $g'(c)(c-a)=g(c)$, soit encore $g'(c)=\dfrac{g(c)}{c-a}$. ▲

Partie II. Théorème des Accroissements Finis

1. Soit $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2. Soit $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ une fonction dérivable dans $\mathbf{R}^+$. On suppose en outre que f' est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$ et que $\forall x\in\mathbf{R}^+,\ f'(x)\geqslant 0$.

a. Soit $x\in[1,+\infty[$ fixé. On applique le **TAF** entre $x-1$ et x d'une part et entre x et $x+1$ d'autre part. Il en résulte l'existence d'un couple $(c,d)\in\,]x-1,x[\times]x,x+1[$ tel que

$$f'(c)=f(x)-f(x-1)\qquad\text{et}\qquad f'(d)=f(x+1)-f(x)$$

Par stricte décroissance de f', je déduis de l'encadrement $c<x<d$ que

$$f'(d)=f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)=f'(c)$$

b. Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ la suite définie par $\forall n\in\mathbf{N}^\star,\quad s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f'(k)$.
Quelques remarques préliminaires s'imposent :
Tout d'abord, comme f' est positive, la fonction f est croissante. D'après le **théorème de la limite monotone**✐ , on sait que f admet une limite

✐ *pour les fonctions*

$\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ au voisinage de $+\infty$ et que cette limite est finie *si et seulement si* f est majorée.au voisinage de $+\infty$.
D'autre part, soit $n \in \mathbf{N}^\star$ fixé. On a $s_{n+1} - s_n = f'(n+1) \geqslant 0$. Par conséquent, la suite (s_n) est croissante. On sait alors d'après le **théorème de la limite monotone** que (s_n) est convergente *si et seulement si* elle est majorée. De plus, d'après la question précédente, appliquée à un entier $k \in \mathbf{N}^\star$, on a

$$f(k+1) - f(k) \leqslant f'(k) \leqslant f(k) - f(k-1)$$

Sommons terme à terme ces encadrements lorsque $k \in [\![1, n]\!]$, il vient ✐

✐ *télescopage des familles*

$$f(n+1) - f(1) \leqslant s_n \leqslant f(n) - f(0) \qquad (1)$$

Pour conclure, procédons par condition nécessaire et condition suffisante :

$\boxed{\text{CN}}$ supposons que (s_n) converge. D'après la **Li-Mo**, il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $s_n \leqslant M$.
D'autre part, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. D'après la **caractérisation séquentielle de la limite**, il s'ensuit que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \ell$. Or, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^\star$ nous avons d'après (1) $f(n+1) - f(1) \leqslant s_n \leqslant M$. Par passage à la limite dans une inégalité, il s'ensuit que ℓ est finie.

$\boxed{\text{CS}}$ supposons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$. Alors f est bornée au voisinage de $+\infty$✐ : il existe donc un couple $(A, M) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| \leqslant M$. En particulier, pour tout entier naturel n supérieur à A, on a d'après (1) $s_n \leqslant M - f(0)$. Ainsi, (s_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente par **Li-Mo**. ▲

✐ *limite finie et bornitude*

c. Application :

- soit u la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}'(k)$.
  Comme la fonction Arctan est de dérivée strictement décroissante et positive sur $\mathbf{R}^+$, le résultat précédent s'applique : comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$, la suite (u_n) est convergente.

- On note v la suite de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k}} = \sum_{k=1}^{n} \varphi'(k)$, où on a noté pour $x \geqslant 0$, $\varphi(x) = 2\sqrt{1+x}$. Comme précédemment, φ' est positive et strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$ et nous pouvons donc appliquer le résultat précédent. Comme cette fois-ci $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, il en résulte que (v_n) est divergente vers $+\infty$. ▲

Partie III. Formule de Taylor pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $b \in \mathbf{R}$, un réel fixé. On définit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = g(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} g^{(k)}(x) + C\,\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{où } C \text{ est un réel fixé.}$$

1. Comme g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbf{R}$, ses dérivées partielles $g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(n)}$ existent, sont dérivables et leurs dérivées sont elles-même continues sur $\mathbf{R}$. D'autre part, les fonctions $x \mapsto (x-a)^k$ sont polynomiales et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Par OPA sur ces fonctions, on déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(b-x)^k}{k!}\right]' g^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^k}{k!}\, g^{(k+1)}(x) - C\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= +\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}\, g^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^k}{k!}\, g^{(k+1)}(x) - C\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-x)^k}{k!}\, g^{(k+1)}(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^k}{k!}\, g^{(k+1)}(x) - C\frac{(b-x)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Par **télescopage** dans les deux premières sommes, les termes d'indice $k \in [\![0, n-1]\!]$ se simplifient, et nous obtenons finalement

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!}\left[g^{(n+1)}(x) + C\right]$$

▲

2. Soit $a \in \mathbf{R}$ un réel fixé. Remarquons que pour tout choix de la constante C, on a $\varphi(b) = 0$, car pour tout k strictement positif, la fonction $x \mapsto (x-b)^k$ s'annule en b. Déterminons donc C de sorte que $\varphi(a) = 0$.
On obtient

$$0 = C\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} + g(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\, g^{(k)}(a)$$

, d'où l'on tire la valeur de C,

$$C = -\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left[g(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\, g^{(k)}(a)\right]$$

Pour ce choix de C, on a φ est continue sur $\mathbf{R}$ donc sur le segment I d'extrémités a et b et de classe $\mathcal{C}^1$ à l'intérieur. Comme précisément $\varphi(a) = \varphi(b)$, il existe, d'après le **théorème de Rolle**, un élément c, strictement compris entre a et b tel que $\varphi'(c) = 0$. D'après la question précédente, ceci revient à dire que

$$g^{(n+1)}(c) + C = 0$$

Finalement, en remplaçant C par l'expression ci-dessus, il vient :

$$g(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\, g^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, g^{(n+1)}(c)$$

▲

3. **Application :** soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées et on pose $M_0 = \sup\limits_{\mathbf{R}} |f|$ et $M_2 = \sup\limits_{\mathbf{R}} |f''|$.