Devoir Surveillé 5 (Part 1)

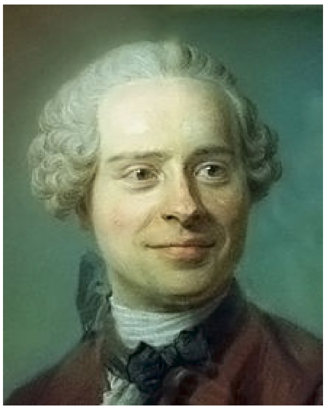
Devellopements limités

Arithmétique

Mercredi 7 Février 2018 (2 heures)

Jean le Rond D'Alembert(1717-1783)

Mathématicien et philosophe français. Il fût abondonné par sa mère, le deuxième jour de sa naissance, devant la porte de la chapelle *Saint-Jean-le-Rond*. Lauréat de l'École de Droit, refusant de s'inscrire au barreau, il entreprit des études de médecine. Il commence ses premiers travaux scientifiques en astronomie. Ami de Voltaire, il était un habitué des salons parisiens. D'Alembert est considéré comme un théoricien de la musique. Ses études de la vibration des cordes font de lui l'un des fondateurs de la physique mathématique. Il est aussi pour avoir dirigé l'Encyclopédie pour ses contributions en mathématiques.



Niveau 1 (5 points) : Question de Cours & Exercices d'application

1. Rappeller l'énoncé du théorème de Bezout
2. Rappeller l'énoncé du théorème de Gauss
3. Rappeller la propriété caractéristique du pgcd
4. Donner le $DL_3(0)$ de $f(x) = e^x \sin x - \cos x \ln(1+x)$.
5. Donner le $DL_2(0)$ de $g(x) = \sqrt{1-x} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Niveau 2 (10 points) :

1. Donner le $DL_3(\pi/4)$ de $\sin x$.
2. Donner le $DL_2(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.
3. Donner le $DL_3(0)$ de $\arctan e^x$.
4. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definie par $f(x) = xe^{x^2}$ admet une application reciproque definie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.
5. Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$
   i. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
   ii. Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?
6. Soit $f : x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   i. Former un développement asymptotique de f à la précision $\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.
   ii. En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
   iii. Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Niveau 3 (15 points) : Problème 1

Calculatrices interdites. On rappelle :

$$\tan u = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 + \frac{17}{315}u^7 + o(u^8).$$

1 Cours

1. Montrer que si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$.
2. Montrer que si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$, alors $f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$. *Etonnant non ?*

2 Quelques calculs standards

1. Donner un équivalent simple, puis la limite éventuelle de $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ lorsque $x \to 0$.
2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$, on définit $g(x) = \left(x^2+3x+\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} \tan\dfrac{1}{x}\cdot$ Montrer que le graphe de g possède une asymptote au voisinage de $+\infty$. Préciser les positions relatives du graphe de g et de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.
3. Déterminer la limite éventuelle de $(\cos x)^{(\sin x)/x^3}$ lorsque $x \to 0$.

3 Un problème "de type terminale"

On s'intéresse ici à la suite u de premier terme $u_0 = 0$, et vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{4}\cdot$

1. Etude de f
   (a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in [0,\pi]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0,\pi]$.
   (c) Esquisser le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$ et sur $[0,\pi]$. On représentera également sur ces dessins la droite d'équation $y = x$.
   (d) Montrer que si $x \in [0,x_0]$, alors $f(x) \in [0,x_0]$. *On dit que* $[0,x_0]$ *est stable par* f.
2. Etude de u
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,x_0]$.
   (b) Représenter les 5 premiers termes de la suite à l'aide du graphe de f (en refaire un pour l'occasion !) en montrant le procédé graphique de construction.
   (c) Montrer que u est croissante, puis que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$.
3. On note maintenant $\delta_n = x_0 - u_n$.
   (a) Montrer que $\delta_{n+1} \sim \lambda\delta_n$, avec $\lambda \in [0,1[$ une constante dont on précisera la valeur.
   (b) Montrer que $\delta_n = o\left(\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right)$ mais $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = o(\delta_n)$.

4 Un développement asymptotique

Dans ce problème, f désigne l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = x^4 + 2x^3 + x + \ln x.$$

On va s'intéresser, pour $n \in \mathbb{N}$, à l'équation $f(x) = n$. Plus précisément, à l'unique solution x_n de cette équation. On en donnera un équivalent... et un peu mieux.

1. Etudier rapidement f ; montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, et représenter son graphe.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $f(x) = n$.
   Dans toute la suite, x_n désignera ce réel (il dépend bien entendu de n).
3. Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (on pourra montrer que pour n assez grand, on a $x_n \geq \dfrac{n^{1/4}}{2}$).
4. Montrer que $x_n \sim n^{1/4}$.
5. On note maintenant $x_n = n^{1/4}(1 + y_n)$. Que dire de y_n ?
6. En injectant l'expression précédente dans l'équation $f(x_n) = n$, montrer : $x_n = n^{1/4} - \dfrac{1}{2} + o(1)$.
7. (plus difficile) Montrer :
$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

Niveau 4-5 (10 points) : Problème 2

Partie I. Le petit théorème de Fermat

Soit $p \in \mathfrak{P}$ un **entier premier**.

1. COURS

a. Montrez que $\forall k \in [\![1, p-1]\!], k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$.

b. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = 2^p$.

2. Montrez que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p.

3. Montrez que p divise $2^p - 2$.

4. Déduisez-en le **petit théorème de Fermat** : «*pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $n^p - n$ est divisible par p*».
Indication : on pourra raisonner par récurrence

Partie II. Application

On souhaite établir l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $4n+1$. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il n'existe au contraire que k nombres premiers de la forme $4n+1$.

On les note $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et on pose $a = p_1 p_2 . \ \ldots \ .p_k$ et $N = a^2 + 1$

1. Soit q un diviseur premier de N. On suppose que $q = 4n + 3$, où $n \in \mathbf{N}$.

a. Pourquoi q ne divise-t-il pas a ?

b. Montrez successivement que q divise $a^{4n+2} - 1$, puis que q divise aussi $a^2 + 1$ et $a^2 - 1$. Déduisez-en finalement que q divise 2 et concluez.

2. Montrez que N est divisible par 2 mais pas par 4.

3. Déduisez des questions précédentes que N admet au moins un diviseur premier de la forme $4m + 1$ et qu'un tel diviseur est différent de $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Concluez !

Formules usuelles

Cas généraux.

$DL_n(0)$	$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
$DL_n(0)$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$
$DL_n(0)$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$
$DL_n(0)$	$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$DL_n(0)$	$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$	$DL_3(0)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)$	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$DL_{2n+1}(0)$	$sh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)$	$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)$	$sh(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)$	$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
$DL_{2n+1}(0)$	$ch(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$DL_3(0)$	$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$
$DL_{2n}(0)$	$ch(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$	$DL_4(0)$	$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$DL_n(0)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{(k)!} x^k + o(x^n)$	$DL_2(0)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$

Cas particuliers.

$DL_3(0)$	$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$DL_2(0)$	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$
$DL_2(0)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$

Corrigé

Niveau 2 (10 points) :

1 $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(x-\frac{\pi}{4})^3+o((x-\frac{\pi}{4})^3)$

2 $(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{11\mathrm{e}}{24}x^2+o(x^2)$.

3 $(\arctan \mathrm{e}^x)'=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\frac{1+x+\frac{}{2}x^2+o(x^2)}{2+2x+2x^2+o(x^2)}=\frac{1}{2}(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))(1-x+o(x^2))$

donc $(\arctan \mathrm{e}^x)'=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))$ puis $\arctan \mathrm{e}^x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+o(x^3)$.

4

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}>0$, de plus $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty, \lim\limits_{-\infty} f=-\infty$.

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier f^{-1} admet une $DL_5(0)$, de plus comme f est impaire, f^{-1} l'est aussi et le $DL_5(0)$ de f^{-1} est de la forme : $f^{-1}(x)=ax+bx^3+cx^5+o(x^5)$.

En réalisant un $DL_5(0)$ de $f^{-1}(f(x))$ on obtient : $f^{-1}(f(x))=ax+(a+b)x^3+(\frac{1}{2}a+3b+c)x^5+o(x^5)$.

Or $f^{-1}(f(x))=x$, donc : $a=1, b=-1$ et $c=\frac{5}{2}$.

5

On a $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)$.

Par suite f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0)=-\frac{1}{2}$.

De plus ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{3}$.

L'équation de la tangente en 0 est $y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x$ et la courbe est localement en dessous de celle-ci.

6

On a $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{1/x}=x+2+\frac{3}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$

Par suite, la droite d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe et la courbe est au dessus de celle-ci.

Niveau 3 (15 points) : Problème 1

1 Cours

1. Supposons $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$. On a alors
$$\frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1,$$
d'où le résultat.
2. Supposons $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$. On a alors $f(x) = 2x + o(x)$ et $g(x) = 3x + o(x)$, donc $f(x) + g(x) = 5x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$, et hop !

2 Quelques calculs standards

1. On fait la différence de deux termes qui tendent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers 0^+ (resp. 0^-). On a donc a priori une forme indéterminée. Comme chaque terme est équivalent à $\frac{1}{x}$, les termes principaux vont s'éliminer. On va donc récupérer un terme au delà de l'équivalent. Commençons par passer au même dénominateur :
$$\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - \tan x}{\ln(1+x)\tan x}.$$
Le dénominateur est équivalent à x^2. Au numérateur les termes en x vont s'éliminer, donc on fait un DL à l'ordre 2 :
$$\ln(1+x) - \tan x = x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2},$$
donc $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ est équivalent à $-\frac{1}{2}$ qui est une constante $\neq 0$, donc $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.
2. On cherche à écrire $g(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(1/x)$. Plutôt que de tatonner sus les différents ordres, écrivont :
$$\begin{aligned} g(x) &= x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)(1+\cdots+o(1/x^p))\left(\frac{1}{x}+\cdots+o(1/x^q)\right) \\ &= x\left(1+\frac{3}{x}+o(1/x^2)\right)(1+\cdots+o(1/x^p))\left(1+\cdots+o(1/x^{q-1})\right) \end{aligned}$$
Pour arriver à nos fins, on va donc prendre $p = 2$ et $q = 3$: $\tan\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o(1/x^3)$, et $e^{1/(x-2)} = e^u = 1 + u + u^2/2 + o(u^2)$, avec $u = \frac{1}{x-2} \sim \frac{1}{x}$, si bien que $o(u^2) = o(1/x^2)$. D'une part, $u = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}(1-2/x)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x}+o(1/x)\right) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o(1/x^2)$, et d'autre part $u^2 \sim 1/x^2$ donc $u^2 = 1/x^2 + o(1/x^2)$, donc :
$$e^{\frac{1}{x-2}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} + o(1/x^2),$$
puis :
$$\begin{aligned} g(x) &= x\left(1+\frac{3}{x}+o(1/x^2)\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2x^2}+o(1/x^2)\right)\left(1+\frac{1}{3x^2}+o(1/x^2)\right) \\ &= x\left(1+\frac{3}{x}+o(1/x^2)\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{17}{6x^2}+o(1/x^2)\right) \\ &= x\left(1+\frac{4}{x}+\frac{35}{6x^2}+o(1/x^2)\right) = x + 4 + \frac{35}{6x} + o(1/x) \end{aligned}$$

Ainsi, $g(x)-(x+4)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$, et le graphe de g possède donc comme asymptote la droite d'équation $y=x+4$. Par ailleurs, $g(x)-(x+4)\sim\dfrac{35}{6x}$, donc est positif au voisinage de l'infini (deux choses équivalentes ont leur rapport qui tend vers 1, donc est positif pour x assez grand...). Le graphe de g est donc situé dessus son asymptote.

3.
$$(\cos x)^{(\sin x)/x^3}=\exp\left(\frac{\sin x}{x^3}\ln(\cos x)\right)=\exp\left(\frac{\sin x}{x^3}\ln\left(1-x^2/2+o(x^2)\right)\right)$$

On a $\sin x\sim x$ et $\ln\left(1-x^2/2+o(x^2)\right)\sim-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\sim-\dfrac{x^2}{2}$, donc $\dfrac{\sin x}{x^3}\ln(\cos x)\sim-\dfrac{1}{2}$, donc[1] $\dfrac{\sin x}{x^3}\ln(\cos x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\dfrac{1}{2}$, puis par continuité de la fonction exponentielle : $\exp(\ldots)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\mathrm{e}^{-1/2}$.

3 Un problème "de type terminale"

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=1-\dfrac{1}{2}\sin x$. L'encadrement $-1\le\sin x\le 1$ donne $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}\sin x\le\dfrac{1}{2}$, puis $-\dfrac{1}{2}\le-\dfrac{1}{2}\sin x\le\dfrac{1}{2}$, et enfin $\dfrac{1}{2}\le f'(x)\le\dfrac{3}{2}\cdot$ $f'(x)$ est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante.

   (b) On a $f(x)=x$ si et seulement si $\cos x=-\dfrac{1}{2}\cdot$ Cette dernière équation possède une seule solution sur $[0,\pi]$, à savoir $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$ (simple connaissance de la fonction cos, qui réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$).
   Maintenant, $f(x)-x=\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{1}{4}$ est une fonction strictement décroissante sur $[0,\pi]$ (nul besoin de dériver !) qui s'annule en x_0, donc est strictement positive sur $[0,x_0[$ et strictement négative sur $]x_0,\pi]$

   (c) Cf Maple. Il convient de faire apparaître les points d'intersection du graphe de f et de la droite d'équation $y=x$.

   (d) Supposons $x\in[0,x_0]$. On a alors $0\le x\le x_0$, et la croissance[2] de f sur $[0,\pi]$ donc sur $[0,x_0]$ nous assure que $f(0)\le f(x)\le f(x_0)$. Mais $f(0)>0$, et $f(x_0)=x_0$ par construction, donc : $0<f(0)\le f(x)\le f(x_0)=x_0$, donc $f(x_0)\in[0,x_0]$.

2. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n\in[0,x_0]$". Déjà, $u_0=0\in[0,x_0]$, ce qui établit $\mathcal{P}(0)$. Supposons maintenant $\mathcal{P}(n)$ vérifiée pour un entier $n\in\mathbb{N}$ FIXÉ. On a alors $u_n\in[0,x_0]$, donc d'après la question 1d, $f(u_n)\in[0,x_0]$, c'est-à-dire $u_{n+1}\in[0,x_0]$, ce qui établit exactement $\mathcal{P}(n+1)$.
   Le principe de récurrence nous assure alors que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   (b) Sur le graphe de f, on part du point $(0,0)$, et on remonte au graphe de f : on tombe sur le point $(0,f(0))$, c'est-à-dire (u_0,u_1). Si on rejoint maintenant la droite $y=x$ en se déplaçant horizontalement, on récupère le point (u_1,u_1). Si on va chercher verticalement le graphe de f, on tombe sur le point $(u_1,f(u_1))$, c'est-à-dire (u_1,u_2), etc...

   (c) Déjà, tous les u_n sont dans $[0,x_0]$, et sur cet intervalle, $f(x)\ge x$, donc $f(u_n)\ge u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1}\ge u_n$. La suite u est donc croissante, et majorée par x_0 (ben oui, tous les u_n sont dans $[0,x_0]$...), donc est convergente. Notons l la limite[3]. Maintenant, si on regarde droit dans les yeux la relation $u_{n+1}=f(u_n)$, on peut voir que le membre de gauche tend vers l lorsque $n\to\infty$, et que le membre de droite tend vers $f(l)$ (heu... pourquoi, au fait ?). On a donc $f(l)=l$.
   Au moment d'écrire le corrigé, je sais déjà que je devrai lire dans quelque heures des "On a $f(l)=l$, or $f(x_0)=x_0$, donc $l=x_0$"... Si ça ne vous choque pas, c'est que vous l'avez écrit, ou que vous l'écrirez à la première occasion. Méditez donc ce point.

[1] Et PAF, le radar automatique...
[2] *Bien entendu*, la continuité de f n'a rien à faire ici...
[3] *Bien entendu*, personne ne se sera laissé aller à un "croissante, majorée par x_0, donc convergente vers x_0" ; bien entendu...

Or donc, on a $f(l) = l$. Mais l'inégalité $0 \leq u_n \leq x_0$ passée à la limite donne $0 \leq l \leq x_0$, et sur cet intervalle, x_0 est la SEULE solution de cette équation[4]

3. (a) On a $\dfrac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \dfrac{x_0 - u_{n+1}}{x_0 - u_n} = \dfrac{f(x_0) - f(u_n)}{x_0 - u_n}$. Mais $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ d'une part, et d'autre part, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$, donc $\dfrac{f(x_0) - f(u_n)}{x_0 - u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(x_0)$, soit encore : $\dfrac{\delta_{n+1}}{\delta_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(x_0) = 1 - \dfrac{\sin x_0}{2}$, et finalement :
$$\delta_{n+1} \sim \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\delta_n.$$
Notons que l'encadrement peu finaud $1 < \sqrt{3} < 2$ assure tout de même : $\dfrac{1}{2} < \lambda = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{4} < \dfrac{3}{4}$.

   (b) Notons $\alpha_n = \dfrac{\delta_n}{(4/5)^n}$. On a $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\lambda}{4/5} < \dfrac{3/4}{4/5} = \dfrac{15}{16}$. Puisque $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\lambda}{4/5} < \dfrac{15}{16}$, il existe un rang N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, $0 < \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq \dfrac{15}{16}$, donc $0 \leq \alpha_{N_0+1} \leq \dfrac{15}{16}\alpha_{N_0}$, puis $0 \leq \alpha_{N_0+2} \leq \dfrac{15}{16}\alpha_{N_0+1} \leq \left(\dfrac{15}{16}\right)^2 \alpha_{N_0}$, et par récurrence immédiate :
$$\forall n \geq N_0, \qquad 0 \leq \alpha_n \leq \left(\frac{15}{16}\right)^{n-N_0},$$
donc $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\delta_n = o\left(\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right)$.

Cette technique appliquée au rapport $\beta_n = \dfrac{(1/2)^n}{\delta_n}$ permettra de montrer de la même façon $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = o(\delta_n)$, l'argument clé étant que $\beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1/2}{\lambda} \in [0, 1[$.

4 Un développement asymptotique

1. f est continue, et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 1 + \dfrac{1}{x}$, quantité strictement positive pour tout $x > 0$, donc f est strictement croissante. Les limites de f en 0^+ et $+\infty$ sont par ailleurs évidentes (les différents protagonistes étant d'accords) : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La continuité, la stricte croissance et les limites nous assurent que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Pour le graphe, on se contente de placer $f(1)$ et de respecter les limites.
2. Fixons $n \in \mathbb{N}$. L'application f étant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, on est certain que n possède un unique antécédent par f.
3. On a $f\left(\dfrac{n^{1/4}}{2}\right) = \dfrac{n}{16} + o(n) \sim \dfrac{n}{16}$, donc $\dfrac{f\left(\frac{n^{1/4}}{2}\right)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{16}$, donc $\dfrac{f\left(\frac{n^{1/4}}{2}\right)}{n} \leq 1$ pour n assez grand. On aura alors :
$$f\left(\frac{n^{1/4}}{2}\right) \leq n = f(x_n),$$
et la *stricte* croissance de f nous assure que $\dfrac{n^{1/4}}{2} \leq x_n$.

   Puisque $\dfrac{n^{1/4}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on conclut : $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

[4] Et PAF le radar automatique : cet argument d'unicité doit forcément apparaître sous uue forme ou une autre

4. On a $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^4$ et $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f(x_n) \sim x_n^4$. Mais $f(x_n) = n$, donc $x_n^4 \sim n$, et enfin $x_n \sim n^{1/4}$.

   En cas d'état d'âme sur le dernier point, écrire $\dfrac{x_n}{n^{1/4}} = \left(\dfrac{x_n^4}{n}\right)^{1/4} \cdots$

5. $\dfrac{x_n}{n^{1/4}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, or ce rapport vaut $1 + y_n$ par construction, donc $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. On suit l'indication de l'énoncé :

$$\begin{aligned} n = f(x_n) &= n(1+y_n)^4 + 2n^{3/4}(1+y_n)^3 + n^{1/4}(1+y_n) + \ln\left(n^{1/4}(1+y_n)\right) \\ &= n\left(1 + 4y_n + o(y_n)\right) + 2n^{3/4} + o(n^{3/4}) \end{aligned}$$

   donc $-2n^{3/4} \sim -2n^{3/4} + o(n^{3/4}) = n\left(4y_n + o(y_n)\right) \sim 4ny_n$ et ainsi $y_n \sim -\dfrac{1}{2n^{1/4}}$, donc $y_n = -\dfrac{1}{2n^{1/4}} + o(1/n^{1/4})$, puis en reportant dans $x_n = n^{1/4}(1+y_n)$:

$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + o(1).$$

7. On écrit maintenant $x_n = n^{1/4} - \dfrac{1}{2} + \varepsilon_n$, et on réinjecte dans l'équation $f(x_n) = n$ selon le même principe (obtenir un terme équivalent à ε_n égal à un terme équivalent à quelque chose de simple). A la première étape, $f(x)$ avait été évalué simplement au niveau de l'équivalent. Pour prolonger le développement asymptotique de x_n, on avait arraché un terme de plus à $f(x)$. Et pour obtenir un nouveau terme dans le DA de x_n, devinez quoi ?

$$\begin{aligned} n = f(x_n) &= n\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{1/4}}\right)^4 + 2n^{3/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{1/4}}\right)^3 + n^{1/4}(...) + \ln(...) \\ &= n\left(1 - \frac{4}{2n^{1/4}} + 4\frac{\varepsilon_n}{n^{1/4}} + \frac{6}{4n^{1/2}}\right) + 2n^{3/4}\left(1 - \frac{3}{2n^{1/4}} + o(1/n^{1/4})\right) + o(n^{1/2}) \\ &= n + n^{3/4}(-2 + 2 + 4\varepsilon_n) + n^{1/2}(3/2 - 3) + o(1/n^{1/2}) \end{aligned}$$

   donc $4\varepsilon_n n^{3/4} = \dfrac{3}{2}n^{1/2} + o(n^{1/2}) \sim \dfrac{3}{2}n^{1/2}$, donc $\varepsilon_n \sim \dfrac{3}{8n^{1/4}}$, et on doit pouvoir conclure si on est arrivé jusque là.

Niveau 4-5 (10 points) : Problème 2

Partie I. le petit théorème de Fermat

Soit $p \in \mathcal{P}$ un **entier premier**.

1. questions de cours

a. soit $k \in n[\![1, p-1]\!]$. D'après la **petite formule**, on a $\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$, soit encore $k\ \binom{p}{k} = p\ \binom{p-1}{k-1}$. ▲

b. d'après la **formule du binôme**, $2^p = (1+1)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}$. ▲

2. Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$, alors k et p sont premiers entre eux. Par conséquent le **théorème de Gauss** s'applique :

$$\begin{array}{r} p \mid p\ \binom{p-1}{k-1} = k\ \binom{p}{k} \\ PGCD(p,k) = 1 \end{array} \Rightarrow p \mid \binom{p}{k}$$

Ainsi $\binom{p}{k}$ est divisible par p. ▲

3. D'après les questions précédentes, p divise $\binom{p}{k}$ pour tout entier $k \in [\![1, p-1]\!]$. En particulier, il doit diviser leur somme :

$$p \mid \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} - \binom{p}{0} - \binom{p}{p} = 2^p - 2.$$

▲

4. La preuve sera par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

- **Initialisation :** lorsque $n = 0$, $0 = 0 \times p$ est bien divisible par p.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n^p - n$ est divisible par p. On a alors

$$\begin{aligned} (n+1)^p - (n+1) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k - n - 1 \\ &= n^p - n + \sum_{k=1} p - 1 \binom{p}{k} n^k \end{aligned}$$

Or d'après la première question $\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$ est divisible par p comme somme de tels nombres tandis que $n^p - n$ est divisible par p par hypothèse de récurrence. Ainsi, $(n+1)^p - (n+1)$ est divisible par p comme somme de tels nombres.

- **Conclusion :** par récurrence, on a montré que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $n^p - n$ est divisible par p. ▲

Partie II. Application

On souhaite établir l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 1$. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il n'existe au contraire que k nombres premiers de la forme $4n + 1$.

On les note $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et on pose $a = p_1 p_2. \ \ldots \ .p_k$ et $N = a^2 + 1$

1. Soit q un diviseur premier de N. On suppose que $q = 4n + 3$, où $n \in \mathbf{N}$.

a. Par l'absurde, *supposons au contraire* que q divise a. En ce cas, q divise a^2 et q divise aussi $N = a^2 + 1$. Par suite q doit diviser leur différence, à savoir 1. Ce qui *contredit* le fait que q est un nombre premier. ▲

b. q étant premier, il divise $a^q - a$ d'après le **Petit Théorème de Fermat**. Comme $q = 4n + 3$, il s'ensuit que q divise $a^{4n+3-a} = a(a^{4n+2} - 1)$. Or q et a sont premiers entre eux d'après la question **1.a**. D'après le **théorème de Gauss**, il en résulte que q divise $a^{4n+2} - 1$.

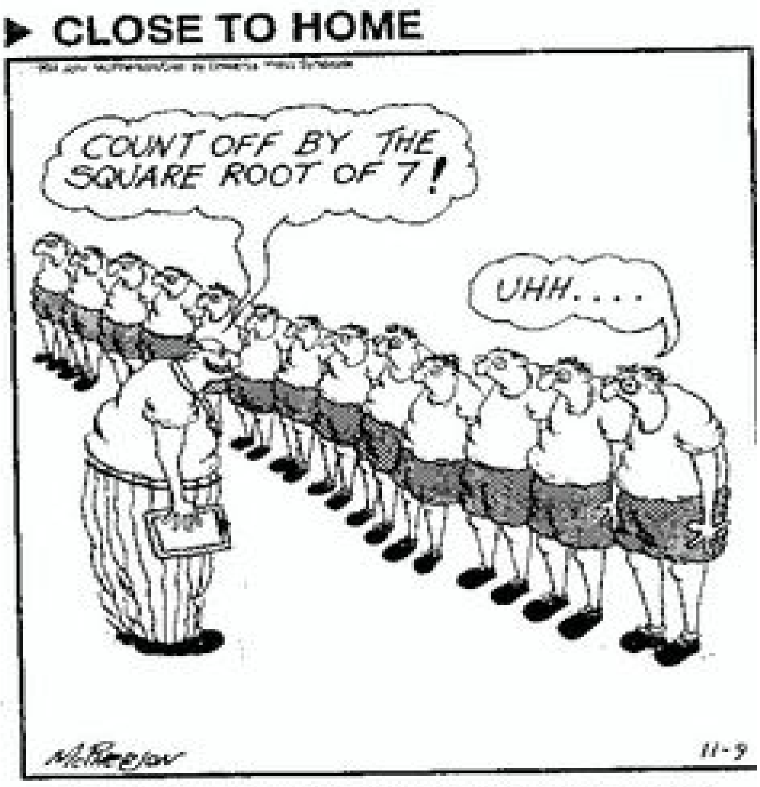
D'autre part, on a $a^{4n+2} - 1 = (a^2 - 1)a^{4n} + a^{4n} - 1$. Or d'après l'**identité géométrique** $a^{4n} - 1$ est divisible par $a^4 - 1$, donc par $N = a^2 + 1$, et donc *a fortiori* par q. Ainsi q divise $a^{4n}-1$ et $a^{4n+2}-1$: il doit donc diviser leur différence, c'est-à-dire $(a^2-1)a^{4n}$. Comme a et q sont premiers entre eux, il découle du **théorème de Gauss** que q divise a^2-1.

Finalement, comme q divise a^2+1 et a^2-1, il divise leur différence, à savoir 2, *ce qui est absurde* vu que q s'écrit sous la forme $q=4n+3$.

En conclusion : les facteurs premiers de N sont 2 ou de la forme $4n+1$ ▲

2. On observe que pour tous nombres entiers (ℓ_1,ℓ_1), $(4\ell_1+1)\times(4\ell_2+1)=4(\ell_1+\ell_2+4\ell_1\ell_2)+1$. Autrement dit, le produits d'entiers de la forme $4\ell+1$ est encore de cette forme. Par conséquent, a étant le produit d'entiers de type $4\ell+1$, il est lui-même de la forme $a=4a'+1$. Par suite $a^2=16(a')^2+16a'+1=4A+1$, d'où l'on tire que $N=4A+2$. Il s'ensuit que N est divisible par 2 mais pas par 4. ▲

3. On sait que k est au moins égal à 3 car $5,13,17$ sont des entiers premiers de la forme $4n+1$. En conséquence, N est un entier strictement supérieur à 2, divisible par 2 mais pas par 4. Il admet donc un diviseur premier p différent de 2. D'après ce qui précède, p est nécessairement de la forme $4n+1$. Pourtant, p ne saurait appartenir à $\{p_1,p_2,\dots,,p_k\}$ car $N=(P_1\times\cdots\times p_k)^2+1$. Ce qui contredit le fait que les seuls nombres premiers de la forme $4n+1$ sont $p_1,p_2,\dots,,p_k$. ▲



Deep down inside, Coach Knott had always wanted to be a math teacher.