Devoir Surveillé 5 (Part Two)

Polynômes

Fractions Rationnelles

Vendredi 9 Mars 2018

Niveau 1 (5 points) : Question de Cours

1 Compléter les assertions suivantes :

- i Nombre de racines de $\mathrm{P} \ldots\ldots \deg \mathrm{P}$;
- ii Si Nombre de racines de $\mathrm{P} > \deg \mathrm{P}$ alors $\ldots\ldots$;

2 Rappeler la définition de :

- i Polynômes scindé ;
- ii Polynôme irréductible ;

3 Quels sont les polynômes scindés dans :

- i $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$;
- ii $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$;

4 Quels sont les polynômes irréductibles dans :

- i $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$;
- ii $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$;

5 Compléter les assertions suivantes :

- i a racine de $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ de multiplicité $\alpha \Leftrightarrow \mathrm{P}(a) = \ldots\ldots$;
- ii a racine de $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ de multiplicité $\alpha \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \ldots\ldots$;

Niveau 2 (5 points) : Exercice d'application

Soit $P = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \in \mathbf{C}[X]$.

1. Vérifiez que P est divisible par $X + 1$ et déterminez $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P = (X+1)Q(X)$.

2. A l'aide du changement d'inconnue $w = z + \dfrac{1}{z}$, résolvez dans $\mathbf{C}$ l'équation $\tilde{Q}(z) = 0$

3. Donnez la décomposition primaire de P dans $\mathbf{C}[X]$.

Niveau 3 (5 points) : Exercice d'approfondissement

Soit $P(X) = X^4 + X^2 + 1$.

1. Déterminez la décomposition de $P(X)$ en produits d'irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

2. Décomposer en éléments simples de $\mathbf{R}(X)$ les fractions suivantes :

a. $F_1(X) = \dfrac{2X^2+3}{(X^2+X+1)^2}$.

Indication : effectuez la division euclidienne de $2X^2+3$ par X^2+X+1.

b. $F_2(X) = \dfrac{1}{X(X^4+X^2+1)}$.

c. $F_3(X) = \dfrac{1}{(X^4+X^2+1)^2}$

Niveau 3-4 (15 points) : Problème

Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier. On se propose d'étudier les polynômes $P_n \in \mathbf{R}[X]$ qui vérifient

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \qquad P_n(\cos x) = \cos nx.} \tag{1}$$

Partie I. Deux exemples

1. Déterminez un polynôme $P_2(X) \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ \tilde{P}_2(\cos x) = \cos(2x)$.

2. Déterminez un polynôme $P_3(X) \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ \tilde{P}_3(\cos x) = \cos(3x)$.

Partie II. Définition récurrente de la suite des polynômes de Tchebychev

1. **Unicité —** Étant donnés deux polynômes à coefficients réels R et S, démontrez que :

$$\textbf{Si} \text{ pour tout réel } x \in \mathbf{R},\ \tilde{R}(\cos x) = \tilde{S}(\cos x), \quad \textbf{alors } R = S.$$

Déduisez-en que si P_n existe, alors il est unique.

2. **Existence —**

a. Justifiez $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2 - 1$.

b. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et tout réel $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos(n+2)x = 2\cos x \cos(n+1)x - \cos nx$$

c. Montrez par récurrence double que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, P_n existe et que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n} \tag{2}$$

Partie III. Factorisation

1. Déterminez le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

2. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation

$$\cos nx = 0 \tag{3}$$

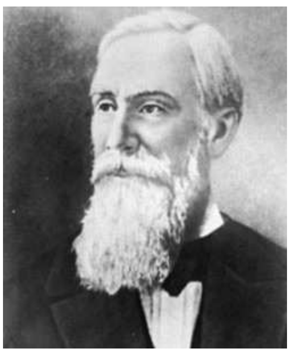
En déduire que P_n admet n racines distinctes dans $[0, \pi]$.

3. En déduire l'ensemble des racines de P_n puis sa décomposition primaire.

4. En évaluant le polynôme P_n en un point x_0 bien choisi, en déduire :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair, } 0 \text{ sinon.}$$

fin



CORRIGE

Niveau 2 (5 points) : Exercice d'application

Niveau 3 (5 points) : Exercice d'approfondissement

Soit $P = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \in \mathbf{C}[X]$.

1. $\tilde{P}(-1) = 0$. D'après la **caractérisation des racines**, ceci revient à dire que P est divisible par $X + 1$.

P est divisible par $X-a$ si et seulement si $\tilde{P}(a)=0$.

Par division euclidienne :

$$P(X) = (X+1)\,Q(X), \qquad \text{ou } Q(X) = X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 1$$

▲

2. 0 n'étant pas racine de Q, on peut écrire que pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\tilde{Q}(z) = 0 \iff z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0 \iff z^2 + 2z - 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

en divisant les deux membres de l'égalité par

On effectue alors le changement d'inconnue $w = z + \dfrac{1}{z}$. Comme :

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= w \\ z^2 + \frac{1}{z^2} &= w^2 - 2 \end{aligned}$$

Il vient pour tout $z \in \mathbf{C}$

$$\tilde{Q}(z) = 0 \iff \begin{cases} z \neq 0 \\ w = z + \dfrac{1}{z} \\ w^2 + 2w - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq 0 \\ z + \dfrac{1}{z} = w \\ w = 1 \text{ ou } w = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 - z + 1 = 0 \\ \text{ou } z^2 + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de la première équation sont $-j = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $-j^2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de la deuxième équation sont $a = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ et $b = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

Finalement, les solutions de l'équation $\tilde{Q}(z) = 0$ sont

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-j, -j^2, a, b\}}$$

▲

3. D'après le **théorème de décomposition primaire dans $\mathbf{C}[X]$**, on a

on détermine

$$P(X) = (X+1)(X+j)(X+j^2)(X+a)(X+b)$$

Niveau 3-4 (15 points) : Problème

1. • D'après la **formule de Moivre**, nous avons d'une part $(\cos x+i\sin x)^4 = \cos 4x+i\sin 4x$.
D'autre part, d'après la **formule du binôme de Newton**

$$\begin{aligned}
(\cos x+i\sin x)^4 &= \cos^4 x + 4\cos^3 x \times (i\sin x) + 6\cos^2 x \times (i\sin x)^2 + 4\cos x \times (i\sin x)^3 + (i\sin x \\
&= \cos^4 x - 6\cos^2 x \times \sin^2 x + \sin^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 4i\cos x\sin^3 x \\
&= \cos^4 x - 6\cos^2 x \times (1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)^2 + 4i\cos^3 x\sin x - 4i\cos x\sin^3 x \\
&= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 + 4i\cos^3 x\sin x - 4i\cos x\sin^3 x
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles nous en déduisons

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

• Suivant la même méthode, nous obtenons aussi :

$$\begin{aligned}
\cos 5x &= \mathfrak{Re}\ (\cos 5x + i\sin 5x) = \mathfrak{Re}\ (\cos x + i\sin x)^5 \\
&= \mathfrak{Re}\ \Big(\cos^5 x + 5\cos^4 x \times (i\sin x) + 10\cos^3 x \times (i\sin x)^2 + 10\cos^2 x \times (i\sin x)^3 \\
&\qquad\qquad +5\cos x \times (i\sin x)^4 + (i\sin x)^5\Big) \\
&= \mathfrak{Re}\ \left(\cos^5 x - 10\cos^3 x \times \sin^2 x + 5\cos x \times \sin^4 x\right) \\
&= \cos^5 x - 10\cos^3 x \times (1-\cos^2 x) + 5\cos x \times (1-\cos^2 x)^2 \\
&= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.
\end{aligned}$$

Posons $A(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$ et $B(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$. Les résultats précédents se traduisent par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \tilde{A}(\cos x) = \cos(4x) \qquad \text{et} \qquad \tilde{B}(\cos x) = \cos(5x)}$$

▲

Partie II. Définition récurrente de la suite des polynômes de Tchebychev

1. Unicité —

a. Soient R et S deux polynômes à coefficients réels tels que pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\tilde{R}(\cos x) = \tilde{S}(\cos x)$. Posons $N = R - S$. Par hypothèse pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$, $N(\cos x)$ est nul. J'en déduis que N possède **une infinité de racines distinctes** ce qui entraîne que N est le polynôme nul. Ainsi, $\boxed{P = Q}$. ▲

b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit P_n et R_n des polynômes vérifiant(4). En ce cas, pour tout nombre réel x,

$$P_n(\cos x) = R_n(\cos x) = \cos(nx)$$

D'après la question précédente, ceci n'est possible que si $P_n = R_n$. Ce qui prouve l'unicité de P_n. ▲

2. Existence —

a. • $\forall x \in \mathbf{R},\ \cos 0x = 1$, par conséquent $P_0 = 1$,

• $\forall x \in \mathbf{R},\ \cos x = \cos x$, par conséquent $P_1 = X$,

- $\forall x \in \mathbf{R},\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, par conséquent, $P_2 = 2X^2 - 1$.

▲

b. Soit$(a,b) \in \mathbf{R}^2$, la formule d'addition pour les cosinus donne :

$$\begin{array}{rcl} \cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) & = & \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{array}$$

Ajoutant terme à terme ces deux égaliés, nous en déduisons immédiatement :

$$\boxed{\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2c\cos a \cos b}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ fixés. Appliquons ce qui précède avec $a = n+1$ et $b = 1$, il vient :

$$\boxed{2\cos(n+1)x\ \cos x = \cos(n+2)x + \cos nx}$$

▲

c. Montrons par récurrence double que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, P_n existe.

Initialisation : D'après la question **2. b ii**, P_0 et P_1 existent.
Hérédité : Soit $n \geqslant 0$ tel que P_n et P_{n+1} existent. Définissons

$$Q = 2XP_{n+1} - P_n$$

D'après la question précédente, nous avons pour tout nombre réel x

$$\begin{array}{rcl} Q(\cos x) & = & 2\cos x P_{n+1}(\cos x) - P_n(\cos x) \\ & = & 2\cos x\ \cos(n+1)x - \cos nx = \cos(n+2)x. \end{array}$$

Par conséquent le polynôme $Q = 2XP_{n+1} - P_n$ vérifie la relation (4). Il s'en suit que P_{n+2} existe et

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

Conclusion : nous avons prouvé l'existence de P_0 et P_1. Puis nous avons démontré que pour tout entier, **si** P_n et P_{n+1} existent **alors** P_{n+2} existe.
Par récurrence double , nous avons donc démontré que P_n existe pour tout $n \in \mathbf{N}$.
De plus par construction de la suite (P_n), elle vérifie la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n} \tag{5}$$

▲

Partie III. Factorisation

1. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}^\star$ que P_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.
Initialisation : lorsque $n = 1$, ou $n = 2$, le résultat découle directement de la question **2. b ii**.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ tel que les monômes dominants de P_n et P_{n+1} soient respectivement $2^{n-1}X^n$ et $2^n X^{n+1}$. Alors par la relation (5), nous avons $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$. Comme par hypothèse P_n est de degré n et XP_{n+1} est de degré $n+2$, il résulte des propriétés du degré d'une somme de polynômes que P_{n+2} est un polynôme de degré $n+2 = \max\{d^\circ P_n, d^\circ XP_{n+1}\}$. De plus son monôme dominant est obtenu en effectuant le produit des monômes dominants de $2X$ et P_{n+1}, ce qui donne 2^{n+1}.
Conclusion : nous avons prouvé par récurrence double que $\forall n \geqslant 1$ P_n admet $2^{n-1}X^n$ comme monôme dominant. ▲

2. Résolvons dans $[0,\pi]$ l'équation
$$\cos nx = 0 \tag{6}$$
Pour tout nombre réel $x \in [0,\pi]$, nous avons
$$\cos nx = 0 \iff nx \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2n} \quad [\frac{2\pi}{2n}]$$
Par conséquent l'ensemble des solutions de (6) dans $[0,\pi]$ est :
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2n}; \frac{3\pi}{2n}; \frac{5\pi}{2n}; \ldots; \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right\} = \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2n}; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$$
A présent, recherchons les racines de P_n.
Comme d'après la question **3. a** P_n est degré n, il **admet au plus n racines réelles distinctes**. D'autre part définissons pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$t_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad \text{et} \quad x_k = \cos t_k$$
D'après la relation (4) $P(x_k) = \cos nt_k = 0$. D'autre part, la fonction $\cos_| : [0,\pi] \to [-1,1]$ étant strictement décroissante donc en particulier injective,
$$\mathsf{Card}\ \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} = \mathsf{Card}\ \{\cos t_0, \cos t_1, \ldots, \cos t_{n-1}\} = \mathsf{Card}\ \mathcal{S} = n$$
En particulier P_n admet n racines distinctes dans $[-1,1]$.

3. D'après la question précédente, P_n a n racines distinctes. Elles sont données par
$$\boxed{x_k = \cos t_k, \quad \text{ou} \quad t_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$
D'après le théorème de factorisation des polynômes à coefficients réels, P_n s'écrit
$$P_n = a_n \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)^{r_k}$$
Comme $\sum_{k=0}^{n-1} r_k = n$, il vient $r_0 = r_1 = \cdots = r_{n-1} = 1$ et en identifiant les coefficients dominants grâce à la question 3. a, nous obtenons :
$$\boxed{P_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)}$$
▲

4. En évaluant le polynôme P_n point 0 , nous obtenons

$$\begin{aligned} P_n(0) &= 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(0-x_k) \\ &= 2^{n-1}(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

D'où il découle que

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}P_n(0)$$

D'autre part, par la relation (4), il vient

$$P_n(0)=P_n(\cos\pi/2)=\cos(n\pi/2)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \\ (-1)^{n/2} & \text{si} \quad n \text{ est pair} \end{cases}$$

En réinjectant ce résultat dans la précédente égalité, *we finally get :*

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)=\frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair, 0 sinon.}$$

▲

Math is

$f(u)^n$