Simulation DS (2 heures)

Structures Algébriques

Jeudi 15 Mars 2018

Niveau 1 (5 points) : Question de Cours

1. Rappeler les propriétés caractéristique de :
   - i. Sous groupes ;
   - ii. Sous anneau ;
   - iii. Sous corps ;
   - iv. Sous espaces vectoriels.
2. Rappeler la définition de :
   - i. diviseurs de zèro ;
   - ii. anneau intègre ;
   - iii. élément inversible dans un anneau $(A, +, \times)$.
3. Quelle est la forme des sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?
4. Donner une CNS pour que
   - i. $\dot{a}$ soit inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$;
   - ii. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ soit corps.

Niveau 2 (5 points) : Exercice d'application

On note classiquement $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module *inférieur ou égal à* 1.

On dit qu'une partie *non vide* $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ est *de type* S si pour tout couple $(z_1, z_2) \in \mathcal{A}^2$, le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans $\mathcal{A}$.

Par ailleurs, on note $b(\mathcal{A})$ le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$ dont le module est *inférieur ou égal à 1*, c'est-à-dire le cardinal de $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}$. On note $b(\mathcal{A}) = \infty$ si ce nombre est infini.

Enfin, si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{C}$, on posera $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \setminus \{0\}$ et $R(\mathcal{A}) = \left\{z \in \mathbb{C},\ z^2 \in \mathcal{A}\right\}$.

On pose classiquement $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on note $\mathbb{Z}[j] = \left\{a + bj,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

0. Montrer que si $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{A}$ est de type S.

1. **a.** Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. $\mathbb{Z}[j]$ est donc bien une partie de type S.

b. Donner la valeur de $b(\mathbb{Z}[j])$.

2. **a.** Montrer que $\mathbb{Z}[j]^*$ est encore de type S. On pourra admettre que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

b. Déterminer $b(\mathbb{Z}[j]^*)$.

Niveau 3 (10 points) : Exercice d'approfondissement

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ B=} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Partie I. Calcul de A^n par récurrence

1. Montrez que A est inversible et calculez A^{-1}

Indication : Calculer AB

2.a. Calculez A^2 et A^3.

b. Montrez que A, A^2 et A^3 se mettent sous la forme :

$$A = \lambda_1 A + \mu_1 I_3 \quad A^2 = \lambda_2 A + \mu_2 I_3 \text{ et } A^3 = \lambda_3 A + \mu_3 I_3$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ et μ_3 sont des réels que l'on précisera.

3. On se donne la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1 \quad \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n$$

Montrer, par récurrence sur n que :

$$\forall n \geqslant 2 \quad A^n = \alpha_n A + 2\alpha_{n-1} I_3$$

4.a. Démontrez que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\alpha_n = \sigma(-1)^n + \tau 2^n$, où σ et τ sont deux réels indépendants de n que l'on déterminera.

b. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout n entier naturel non nul.

Partie II. Calcul de A^n à l'aide d'une relation polynomiale (première version)

1.a. Calculez le produit $(A + I_3)(A - 2I_3)$. En déduire à nouveau que A est inversible et retrouvez la valeur de A^{-1}.

b. Calculez de même $(A + I_3)^2$, $(A - 2I_3)^2$ et en déduire une expression simple de $(A + I_3)^n$ et de $(A - 2I_3)^n$ pour tout n entier naturel non nul.

2. Soit $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble $\mathcal{F} = \left\{M(a, b)\,;\ (a, b) \in \mathbf{R}^2\right\}$. Montrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

3. Calculez $\big(M(a, b)\big)^n$ pour tout n entier naturel non nul. Vérifiez le résultat obtenu dans le cas particulier de $M(0, 1)$.

Indication : exprimer M(a,b) en fonction de $A + I_3$, $A - 2I_3$

Niveau 2 (5 points) : Exercice d'application

Supposons que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Alors $\mathcal{A}$ est non vide. De plus, si on se donne $(z_1, z_2) \in \mathcal{A}^2$, $z_1 z_2 \in \mathcal{A}$ par stabilité de $\mathcal{A}$ par produit. De plus, $z_1^2 \in \mathcal{A}$ et $z_2^2 \in \mathcal{A}$ toujours par stabilité par produit puis $z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}$ par stabilité par somme. Ainsi $\mathcal{A}$ est bien de type S.

1. Tout d'abord, $1 = 1 + 0j \in \mathbb{Z}[j]$.
Soit ensuite $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[j]^2$. Il existe donc $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$.

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 j) - (a_2 + b_2 j) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j$$

Or $(a_1 - a_2, b_1 - b_2) \in \mathbb{Z}^2$ donc $z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}[j]$.
En utilisant le fait que $j^2 = -j - 1$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) j + b_1 b_2 j^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2) j \end{aligned}$$

Or $(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2) \in \mathbb{Z}^2$ donc $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[j]$.
De la même manière, Finalement, $\mathbb{Z}[j]$ est bien un sous-anneau de $\mathbb{C}$ donc une partie de type S.

2. Soit $z \in \mathbb{Z}[j] \cap \mathcal{U}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $z = a + bj$. Alors

$$|z|^2 = (a + bj)(a + b\bar{j}) = a^2 + b^2 + ab(j + \bar{j}) = a^2 + b^2 - ab$$

Puisque a et b sont entiers et a fortiori réels, $(a+b)^2 \geqslant 0$ et $(a-b)^2 \geqslant 0$. En développant, on obtient $a^2 + b^2 \geqslant -2ab$ et $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Or $|z|^2 \leqslant 1$ i.e. $a^2 + b^2 - ab \leqslant 1$ donc $ab \leqslant 1$ et $-3ab \leqslant 1$, autrement dit $-\frac{1}{3} \leqslant ab \leqslant 1$.
Or ab est entier donc $ab = 0$ ou $ab = 1$.
Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$. Si $a = 0$, alors $|z| = |b| \leqslant 1$ donc $b \in \{-1, 0, 1\}$ car b est entier. Si $b = 0$, alors $|z| = |a| \leqslant 1$ donc $a \in \{-1, 0, 1\}$ car a est entier.
Si $ab = 1$, alors $a = b = -1$ ou $a = b = 1$.
Finalement si $|z| \leqslant 1$, $(a, b) \in \{(0,0), (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1), (-1,-1), (1,1)\}$. Réciproquement, tous les couples (a, b) cités donnent bien $|z| \leqslant 1$. Enfin, la question ?? montre que tous ces couples (a, b) donnent bien des complexes $z = a + bj$ distincts.
Ceci montre que $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$.

Niveau 3 (10 points) : Exercice d'approfondissement

$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ car AB=2 I

2.a. Calculons A^2 et A^3 :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&3&3\\3&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}\end{array}$$

b. D'après la question précédente, on a aisément

$$\begin{array}{rcl} A^0 & = & 0A+1I_3\\ A^1 & = & A+0I_3\\ A^2 & = & A+2I_3\\ A^3 & = & 3A+2I_3\end{array}$$

$\blacktriangle$

3. On considère la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définie par $\alpha_1=\alpha_2=1$ et $\forall n\geqslant 1, \alpha_{n+2}=\alpha_{n+1}+2\alpha_n$.
Montrons par récurrence sur n que : $\forall n\geqslant 2\quad A^n=\alpha_nA+2\alpha_{n-1}I_3$:

- **Initialisation :** d'après la question précédente, $A^2=A+2I_3=\alpha_2A+2\alpha_1I$.
- **Hérédité :** Soit $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$ tel que

  $$A^n=\alpha_nA+2\alpha_{n-1}I_3$$

  En ce cas,

  $$\begin{array}{rcl} A^{n+1} & = & A\times(\alpha_nA+2\alpha_{n-1}I_3)=\alpha_nA^2+2\alpha_{n-1}A\\ & = & \alpha_n(A+2I)+2\alpha_{n-1}A=(\alpha_n+2\alpha_{n-1})A+2\alpha_nI_3\\ & = & \alpha_{n+1}A+2\alpha_nI_3\end{array}$$

- **Conclusion :** la propriété est vraie pour $n=2$ et est héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n\geqslant 2$. $\blacktriangle$

4.a. La suite (α_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique :

$$(EC)\qquad\qquad r^2=r+2$$

admet -1 et 2 comme racines évidentes. Par conséquent, il existe un couple $(\sigma,\tau)\in\mathbf{R}^2$, unique tel que

$$\forall n\in\mathbf{N}^\star,\quad \alpha_n=\sigma(-1)^n+\tau 2^n$$

Pour déterminer σ et τ évaluons l'égalité ci-dessus lorsque $n=1$ ou 2. Il vient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha_1 & = & -\sigma+2\tau\\ \alpha_2 & = & \sigma+4\tau\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}-\sigma+2\tau & = & 1\\ \sigma+4\tau & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\sigma & = & -\frac{1}{3}\\ \tau & = & \frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Finalement, pour tout entier naturel $n\in\mathbf{N}^\star$,

$$\boxed{\alpha_n=\frac{(-1)^{n+1}}{3}+\frac{2^n}{3}}$$

$\blacktriangle$

b. A l'aide des deux questions précédentes, il vient

$$A^n = \alpha_n A + 2\alpha_{n-1} I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2.(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2.(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2.(-1)^n \end{pmatrix}$$

▲

Partie 4. Calcul de A^n à l'aide d'une relation polynomiale (première version)

1.a. D'après la question **2.b**, $(A+I)(A-2I) = A^2 - A - 2I = 0$. Il s'ensuit que

$$I = \frac{1}{2}(A-I) \times A$$

Par conséquent, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. ▲

b. Posons ces mutltiplications :

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $(A+I)^2 = 3(A+I)$, et $(A-2I)^2 = (-3)\ (A-2I)$. Partant, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad \begin{cases} \bullet \quad (A+I)^n = 3^{n-1}(A+I) \\ \bullet \quad (A-2I)^n = (-3)(A-2I) \end{cases}$$

▲

2. Soit $M(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

d. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, alors l'équation matricielle

$$M(a,b) = \lambda \cdot (A+I) + \mu \cdot (A-2I)$$

se traduit (en identifiant les neuf coefficients de ces matrices 3×3) par le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu = a \\ \lambda + \mu = b \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3}(a+2b) \\ \mu = \frac{1}{3}(b-a) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{M(a,b) = \frac{a+2b}{3}\,(A+I) + \frac{b-a}{3}\,(A-2I)}$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Comme les deux matrices $A+I$ et $A-2I$ commutent, la **formule du binôme** s'applique :

$$\big[M(a,b)\big]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (A+I)^k (A-2I)^{n-k}$$

De plus, le produit $(A+I)(A-2I)$ étant nul, tous les termes de cette somme sont nuls, à l'exception des deux extrêmes : il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\big[M(a,b)\big]^n &= \lambda^n \cdot (A+I)^n + \mu^n \cdot (A-2I)^n \\
&= 3^{n-1}\lambda^n \cdot (A+I) + (-3)^{n-1}\mu^n \cdot (A-2I) \\
&= \frac{(a+2b)^n}{3} \cdot (A+I) + (-1)^{n-1}\,\frac{(b-a)^n}{3} \cdot (A-2I)
\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $(a,b)=(0,1)$, nous retrouvons

$$\begin{aligned}
A^n &= \big[M(0,1)\big]^n = \frac{2^n}{3} \cdot (A+I) + \frac{(-1)^{n-1}}{3} \cdot (A-2I) \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

▲