Concours Blanc (4 heures)

Structures Algébriques

Polynômes-Calcul Matriciel

Lundi 19 Mars 2018

Documents et Calculatrices Interdits

Niveau 1 (5 points) : Questions et exercices de Cours

1 Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Rappeler les définitions de :

i $\ker f$;

ii $\operatorname{Im} f$.

2 Montrer que :

i $\ker f \subset \ker f^2$;

ii $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

3 On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

i Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$;

ii Donner ses éléments inversibles.

4 Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$

Niveau 2 (5 points) : Exercice d'application

On admettra l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On introduit l'ensemble $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} / (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ muni de l'addition et de la multiplication des réels est un anneau.

2.a Etablir $\forall x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], \exists!(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.

On pose alors $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$ appelé conjugué de x.

2.b Montrer que l'application de conjugaison $x \mapsto \overline{x}$ est un automorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

3. Pour $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on pose $N(x) = x\overline{x}$.

3.a Justifier que $\forall x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], N(x) \in \mathbb{Z}$, et

$\forall x, x' \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], N(xx') = N(x)N(x')$.

3.b Montrer que $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est inversible ssi $N(x) \in \{1, -1\}$.

3.c On forme $H = \left\{x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] / N(x) = \pm 1\right\}$.

Justifier par un argument rapide que H est un groupe pour la multiplication des réels.

Niveau 3 (10 points) : Exercice d'approfondissement

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Préliminaires

1. Calculez le produit $(A + I_3)(A - 2I_3)$

2. En déduire A^n en fonction de A et I pour n=2

3. Montrer par récurrence sur n, entier naturel que

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

Partie 2 : A^n à l'aide d'une relation polynomiale (deuxième version)

Soit n un entier naturel non nul et soit R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $(X+1)(X-2)$.

1.a. Que peut-on dire du degré de R_n ?

b. Calculez $R_n(-1)$ et $R_n(2)$ puis déterminez le polynôme R_n.

c. Montrez que les coefficients du polynôme R_n sont entiers.

2. Retrouvez à nouveau l'expression de A^n.

Partie 3 : A^n par diagonalisation

1.a. Montrez que P est inversible et calculez son inverse P^{-1}.

Indication : Calculer PQ

b. Calculez la matrice D, égale au produit $P^{-1} \times A \times P$.

c. Explicitez les puissances D^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

2.a. Justifiez l'égalité $A = P \times D \times P^{-1}$.

b. Démontrez que pour tout n entier naturel $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

c. En déduire la valeur de A^n en fonction de n pour tout n entier naturel non nul.

Niveau 3-4 (10 points) : Problème de Synthèse

Interpolation et polynômes factoriels

Notations :

n est un entier naturel fixé, $n \geq 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) \text{ et } T(f)(x) = f(x+1).$$

On admettra (aisément !) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ (donc si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1} \text{ et } T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}.$$

1. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
   Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
   Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

2. On note Δ_n la restriction de Δ au départ de E_n.

2.a Vérifier que Δ_n réalise un endomorphisme de E_n.

2.b Déterminer $\ker \Delta_n$.

3. Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme Δ est surjectif. (Admise)

Partie II

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

2. $$\forall x \in \mathbb{R}, N_0(x) = 1 \text{ et } N_k(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

1.a Pour $k \geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction de l'un des polynômes $(N_j)_{j\geq 0}$.

1.b Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$ puis $(\Delta^j(N_k))(0)$.

2. Soit $P \in E_n$, P s'écrit $P = a_0N_0 + a_1N_1 + \ldots + a_nN_n$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
   Exprimer les a_j en fonction des $(\Delta^j(P))(0)$.

3. Applications :
   On pose $P(x) = x^2$. Déterminer les coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ P(x) = aN_0(x) + bN_1(x) + cN_2(x)$$
   et en déduire une fonction polynôme Q telle que $\Delta(Q) = P$.
   Exploiter celle-ci pour exprimer $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

4. Soit $f \in \mathcal{F}$.

4.a Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $(T^k(f))(x)$.

4.b Etant donné $n \in \mathbb{N}$, expliciter $\Delta^n(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leq k \leq n$.
(on pourra remarquer que $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$).

4.c En déduire que $(\Delta^n(f))(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0,1,\ldots,n$.

Partie III

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \deg P \leq n \\ \forall k \in \{0,1,\ldots,n\}, P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose :

$$N(x) = \prod_{j=0}^{n} (x-j) = x(x-1)\ldots(x-n).$$

1. Soit l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : E_n &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(0),\ldots,P(n)) \end{aligned}$$

Montrer que φ est un isomorphisme.

1.b En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2.a Pour $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, comparer $(\Delta^j(f))(0)$ et $(\Delta^j(P_f))(0)$.

2.b En déduire l'expression de P_f en fonction des $(\Delta^j(f))(0)$ et des polynômes N_j.

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On note :

$$M_{n+1} = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, t \in [0,n]\right\}.$$

3.a Soit $x \in [0,n]$, non entier. Montrer que :

$$\exists \xi \in [0,n], f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} N(x).$$

On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$ et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.

3.b En déduire que $\forall x \in [0,n], \left|f(x) - P_f(x)\right| \leq \dfrac{1}{n+1} M_{n+1}$

On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

End Exam

Niveau 2 (5 points) : Exercice d'application

1. Montrons que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

Bien entendu, $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\subset\mathbb{R}$.

$1=a+b\sqrt{2}$ avec $a=1\in\mathbb{Z}$ et $b=0\in\mathbb{Z}$ donc $1\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

Soit $x=a+b\sqrt{2}$ et $x'=a'+b'\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

$x-x'=(a-a')+(b-b')\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ car $a-a',b-b'\in\mathbb{Z}$.

$xx'=(aa'+2bb')+\sqrt{2}(ab'+a'b)\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ car $aa'+2bb',ab'+a'b\in\mathbb{Z}$.

Donc $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

2.a Soit $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

L'existence du couple (a,b) découle de la définition de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

Etudions l'unicité :

Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ et $(a',b')\in\mathbb{Z}^2$ deux couples solutions.

On a $x=a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ donc $a-a'=(b'-b)\sqrt{2}$.

Si $b\neq b'$ alors $\sqrt{2}=\dfrac{a-a'}{b'-b}\in\mathbb{Q}$ ce qui est faux.

Donc $b=b'$ puis $a-a'=(b'-b)\sqrt{2}=0$ donc $a=a'$.

2.b Notons $\varphi:\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\to\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ l'application définie par $\varphi(x)=\overline{x}$.

$\varphi(1)=\varphi(1+0.\sqrt{2})=1-0.\sqrt{2}=1$.

Soit $x=a+b\sqrt{2}$ et $x'=a'+b'\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\varphi(x+x')&=\varphi((a+a')+(b+b')\sqrt{2})=(a+a')-(b+b')\sqrt{2}\\&=(a-b\sqrt{2})+(a'-b'\sqrt{2})=\varphi(x)+\varphi(x')\end{aligned}$$

$\varphi(xx')=\varphi((aa'+2bb')+(ab'+a'b)\sqrt{2})=(aa'+2bb')-(ab'+a'b)\sqrt{2}$

et $\varphi(x)\varphi(x')=(a-b\sqrt{2})(a'-b'\sqrt{2})=(aa+2bb')-(ab'+a'b)\sqrt{2}$

donc $\varphi(xx')=\varphi(x)\varphi(x')$.

Ainsi φ est un morphisme de l'anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ dans lui-même.

On constate $\overline{\overline{x}}=x$, il s'ensuit que φ est involutive et donc bijective, c'est donc un automorphisme de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

3.a Pour $x=a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $N(x)=a^2-2b^2\in\mathbb{Z}$ car $a,b\in\mathbb{Z}$.

Pour $x,x'\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $N(xx')=xx'\overline{xx'}=xx'\overline{x}\,\overline{x'}=x\overline{x}x'\overline{x'}=N(x)N(x')$.

3.b Soit $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

Si x est inversible alors $xx^{-1}=1$ et donc $N(x)N(x^{-1})=1$.

Or $N(x),N(x^{-1})\in\mathbb{Z}$ donc $N(x),N(x^{-1})\in\{1,-1\}$.

Inversement, supposons $N(x)\in\{1,-1\}$.

Si $N(x)=1$ alors $x\overline{x}=1$ et donc x est inversible d'inverse $\overline{x}$.

Si $N(x)=-1$ alors $x\overline{x}=-1$ et donc x est inversible d'inverse $-\overline{x}$.

Dans les deux cas x est inversible

3.c H est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],+,\times)$

Niveau 3 (10 points) : Exercice d'approfondissement

▲

A^n à l'aide d'une relation polynomiale (deuxième version)

Soit n un entier naturel non nul et soit R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $(X+1)(X-2)$.

1.a. R_n est de degré strictement inférieur ou égal à 2. ▲

b. Ecrivons la division euclidienne de X^n par $Q=(X+1)(X-2)$, il vient

$$X^n = BQ + R_n, \quad R_n(X) = \alpha X + \beta$$

Evaluons cette égalité polynomiale en -1 et 2, il vient

$$\left\{\begin{array}{rcl}(-1)^n & = & -\alpha+\beta \\ 2^n & = & 2\alpha+\beta\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha & = & \frac{1}{3}\left[2^n-(-1)^n\right] \\ \beta & = & \frac{1}{3}\left[2^n+2(-1)^n\right]\end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\boxed{R_n(X) = \frac{2^n-(-1)^n}{3}X + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}}$$

▲

c. Remarquons que d'après l**identité géométrique**, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
2^n-(-1)^n &= \big(2-(-1)\big)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}2^k \\
&= 3\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}2^k \\
2^n+2(-1)^n &= 2\big(2^{n-1}-(-1)^{n-1}\big) \\
&= 2\big(2-(-1)\big)\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-k-2}2^k \\
&= 6\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-k-2}2^k
\end{aligned}$$

Par conséquent, les coefficients de R_n sont entiers. ▲

2. D'après la question précédente, on a :

$$X^n = B(X+1)(X-2) + \frac{2^n-(-1)^n}{3}X + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}$$

En particulier, en appliquant cette égalité polynomiale à la matrice A, on tire :

$$A^n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}A + \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

▲

Niveau 3-4 (10 points) : Problème de Synthèse

Partie I

1. Si P est un polynôme constant alors $\Delta(P)=0$ ce qui en détermine degré et coefficient dominant.

Si P est un polynôme non constant, posons p son degré, on peut écrire $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ (avec $a_p\neq 0$) et on a $\Delta(P)=\sum_{k=0}^{p}a_k\Delta(X^k)$ avec $\Delta(X^0)=0$ et $\Delta(X^k)=(X+1)^k-X^k=kX^{k-1}+\cdots$ pour $k\geq 1$. Par suite $\Delta(P)=pa_pX^{p-1}$ donc $\deg\Delta(P)=p-1$ et le coefficient dominant de $\Delta(P)$ est pa_p où a_p désigne le coefficient dominant de P.

2.a Δ_n est linéaire car restriction d'une application linéaire, de plus ci-dessus, on a vu que si $\deg P\leq n$ alors $\deg\Delta(P)\leq n-1\leq n$ donc $\Delta_n:E_n\to E_n$ et ainsi Δ_n est un endomorphisme de E_n.

2.b En 1, on a obtenu : si P est constant $\Delta(P)=0$ et si P non constante $\Delta(P)\neq 0$. Le noyau de Δ_n est donc réduit à l'ensemble des polynômes constants. Ainsi $\dim\ker\Delta_n=1$ et par le théorème du rang $\operatorname{rg}\Delta_n=\dim E_n-1=n$. De plus si $P\in E_n$ alors on a $\deg\Delta(P)\leq n-1$ donc $\Delta(P)\in E_{n-1}$. Par suite $\operatorname{Im}\Delta_n\subset E_{n-1}$. Par inclusion et égalité des dimensions : $\operatorname{Im}\Delta_n=E_{n-1}$.

3. $\forall P\in E$, on posant $n=\deg P$, il existe $Q\in E_{n+1}$ tel que $\Delta(Q)=P$ car Δ_{n+1} est un endomorphisme de E_{n+1} dont l'image est E_n.

Partie II

1.a $\Delta(N_k)(x)=N_k(x+1)-N_k(x)=\dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+2)}{k!}(x+1-(x-k+1))=\dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+2)}{(k-1)!}$

donc $\Delta(N_k)=N_{k-1}$.

1.b Pour $j\leq k$: $\Delta^j(N_k)=N_{k-j}$ et puisque $\Delta(N_0)=0$, $\Delta^j(N_k)=0$ pour $j>k$.

Par suite $(\Delta^j(N_k))(0)=0$ si $j<k$ et si $j>k$ alors que $(\Delta^j(N_k))(0)=1$ si $j=k$.

2.a La famille $(N_0,N_1,...,N_n)$ vérifie $\deg N_k=k$ donc c'est une famille de polynôme de degrés étagés et par conséquent celle-ci est une base de E_n.

2.b $(\Delta^j(P))(0)=\sum_{k=0}^{n}a_k(\Delta^j(N_k))(0)=a_j$ puisque $(\Delta^j(N_k))(0)=\delta_{j,k}$.

3. $a=\Delta^0(P)(0)=0$, $b=\Delta^1(P)(0)=1$ et $c=\Delta^2(P)(0)=2$.

Considérons $Q=aN_1+bN_2+cN_3$. Par l'étude qui précède $\Delta(Q)=aN_0+bN_1+cN_2=P$.

Concrètement : $Q(x)=\dfrac{x(x-1)}{2}+2\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}=\dfrac{x(x-1)(2x-1)}{6}$.

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}P(k)=\sum_{k=1}^{n}\Delta(Q)(k)=\sum_{k=1}^{n}Q(k+1)-Q(k)=Q(n+1)-Q(1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.a Par récurrence $T^k(f)(x)=f(x+k)$.

4.b $\Delta=T-\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ avec T et $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ qui commutent donc par la formule du binôme de Newton :

$$\Delta^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}T^k \text{ puis } \Delta^n(f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}T^k(f).$$

4.c $(\Delta^n(f))(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(k)$ car $T^k(f)(0)=f(k)$.

Partie III

1.a Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in E_n$.
$\varphi(\lambda P+\mu Q)=(\ldots,(\lambda P+\mu Q)(k),\ldots)=(\ldots,\lambda P(k)+\mu Q(k),\ldots)=\lambda(\ldots,P(k),\ldots)+\mu(\ldots,Q(k),\ldots)$
donc $\varphi(\lambda P+\mu Q)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$ et φ est linéaire.
Soit $P\in E_n$. Si $\varphi(P)=(0,\ldots,0)$ alors $P(0)=\ldots=P(n)=0$ et donc le polynôme admet au moins $n+1$ racines or $\deg P\le n$ donc $P=0$. Ainsi $\ker\varphi=\{0\}$ or $\dim E_n=\dim\mathbb{R}^{n+1}$ donc φ est un isomorphisme.

1.b Par la bijectivité de φ, il existe un unique $P\in E_n$ tel que $\varphi(P)=(f(0),\ldots,f(n))$. Par suite le problème $\mathcal{P}$ possède une unique solution.

2.a $(\Delta^j(f))(0)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}f(k)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}P(k)=(\Delta^j(P_f))(0)$.

2.b Rappelons que pour $P\in E_n$: $P=\sum_{j=0}^{n}a_jN_j$ avec $a_j=\Delta^j(P)(0)$ donc

$$P_f=\sum_{j=0}^{n}(\Delta^j(P_f))(0)N_j=\sum_{j=0}^{n}(\Delta^j(f))(0)N_j.$$

3.a Posons K une constante telle que $f(x)-P_f(x)=K.N(x)$. Une telle constante K existe car $N(x)\neq 0$ puisque $x\notin\mathbb{N}$.
Considérons alors $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=f(t)-P_f(t)-KN(t)$. φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui s'annule en $0,1,\ldots,n$ et aussi en x. Cela fournit $n+2$ annulation dans $[0,n]$. Par application du théorème de Rolle, φ' s'annule au moins $n+1$ fois dans $[0,n]$ et en reprenant ce processus, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois dans $[0,n]$ en un certain ξ. Or $\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-0-(n+1)!K$ car $\deg P_f\le n$ et N est un polynôme unitaire de degré $n+1$ donc $N^{(n+1)}=(n+1)!$. La relation $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$ donne alors $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ ce qui permet de conclure.

3.b Pour $x\in\mathbb{N}\cap[0,n]$, $|f(x)-P_f(x)|=0\le\dfrac{1}{n+1}M_{n+1}$.
Pour $x\in[0,n]$, $x\notin\mathbb{N}$: $|f(x)-P_f(x)|=\dfrac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|N(x)|\le\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|N(x)|$.
Pour conclure, il reste à établir : $\forall x\in[0,n],|N(x)|\le n!$.
Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$, $N(x)=x$ et la propriété est vraie.
Supposons la propriété établie au rang $n\ge 1$:
Pour $x\in[0,n+1]$, étudions $N(x)=x(x-1)\times\ldots\times(x-(n+1))=M(x)\times(x-n-1)$.
Par HR, pour $x\in[0,n]$, on a $|M(x)|\le n!$ donc $|N(x)|\le n!\times|x-n-1|$ avec $|x-n-1|\in[1,n+1]$ donc $|N(x)|\le(n+1)!$. Pour $x\in[n,n+1]$,
$|N(x)|=x(x-1)\times\ldots\times(x-n)\times(n+1-x)\le(n+1)n\times\ldots\times1\times1=(n+1)!$. Récurrence établie et problème résolu.