Espaces Vectoriels

Simulation DS (1 heure)

Lundi 19 Avril 2018

Documents et Calculatrices Interdits

Niveau 2-3 (4 points) : Exercice d'application

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Démontrer l'équivalence : $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f) \iff \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_F\}$.
2. Démontrer l'équivalence : $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g) \iff \operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(f) = F$.

Niveau 2-3 (6 points) : Exercice d'application

On considère l'application p définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{3x-y+2z}{4}, \frac{-x+3y+2z}{4}, \frac{x+y+2z}{4}\right) \end{array}$$

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner l'expression de la symétrie s associée à p.
4. Déterminer trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que : $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ et $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Vect}(e_3)$.

Niveau 4 (10 points) : Exercice d'approfondissement

On considère trois endomorphismes p, q et r d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que

$$p \circ q = r \qquad q \circ r = p \qquad r \circ p = q$$

1. Démontrer que $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q) = \operatorname{Ker}(r)$.
2. Démontrer que $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q) = \operatorname{Im}(r)$.
3. Montrer que $p^2 = q^2 = r^2$ (où f^2 désigne bien entendu $f \circ f$).
4. Etablir que $q^5 = q$ (on pourra s'intéresser à l'endomorphisme p^2qp^2).
5. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(q) \oplus \operatorname{Im}(q)$.

Fin

Niveau 2-3 (4 points) : Exercice d'application

$\Leftarrow$ Supposons que $\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$

Si $x \in \ker(f)$, alors, $f(x) = 0$, d'où $g(f(x)) = g(0) = 0$ puis $x \in \ker(g\circ f)$.

L'inclusion $\ker(f) \subset \ker(g\circ f)$ est donc prouvée.

Réciproquement, soit $x \in \ker(g\circ f)$. On a donc $(g\circ f)(x) = 0$, c'est-à-dire, $g(f(x)) = 0$.

Le vecteur $f(x)$ appartient donc à $\ker(g)$, mais on a aussi $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$

Ainsi : $f(x) \in \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ par hypothèse, d'où $f(x) = 0$ puis $x \in \ker(f)$.

L'inclusion $\ker(g\circ f) \subset \ker(f)$ est donc démontrée.

Finalement, $\ker(g\circ f) = \ker(f)$

En conclusion : $\boxed{\ker(g\circ f) = \ker(f) \iff \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_F\}}$

② $\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}(g)$

L'inclusion $\ker(g) + \mathrm{Im}(f) \subset F$ est claire puisque $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sev de F

Réciproquement, soit $x \in F$. On a $g(x) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g\circ f)$, donc : $\exists\, \alpha \in E, g(x) = (g\circ f)(\alpha)$

Écrivons alors : $x = \underbrace{x - f(\alpha)}_{\in \ker(g)} + \underbrace{f(\alpha)}_{\in \mathrm{Im}(f)}$, d'où : $x \in \ker(g) + \mathrm{Im}(f)$.

$\in \ker(g)$ car $g(x - f(\alpha)) = g(x) - (g\circ f)(\alpha) = 0$

L'inclusion $F \subset \ker(g) + \mathrm{Im}(f)$ est donc vérifiée, d'où l'égalité.

$\Leftarrow$ Supposons que $\ker(g) + \mathrm{Im}(f) = F$

Si $x \in \mathrm{Im}(g\circ f)$, alors, il existe $a \in E$ tel que $x = (g\circ f)(a) = g(f(a))$, d'où $x \in \mathrm{Im}(g)$

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}(g)$: Il existe $a \in F$ tel que $g(a) = x$

Puisque $F = \ker(g) + \mathrm{Im}(f)$, on peut écrire $a = b + c$ avec $b \in \ker(g)$ et $c \in \mathrm{Im}(f)$.

On a donc $g(b) = 0$ et : $\exists\, u \in E$, $c = f(u)$.

Ainsi : $x = g(a) = g(b+c) = g(b) + g(c) = 0 + (g\circ f)(u) = (g\circ f)(u) \in \mathrm{Im}(g\circ f)$.

L'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g\circ f)$ est donc démontrée, d'où l'égalité.

En conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \ker(g) + \mathrm{Im}(f) = F}$

3/4

Niveau 2-3 (6 points) : Exercice d'application

On trouve : $p(\alpha u+\beta v) = p\left(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z'\right)$

$$= \left(\frac{3(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')}{4}, \frac{-(\alpha x+\beta x')+3(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')}{4}, \frac{(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')}{4}\right)$$

$$= \left(\alpha\frac{3x-y+2z}{4}+\beta\frac{3x'-y'+2z'}{4}, \alpha\frac{-x+3y+2z}{4}+\beta\frac{-x'+3y'+2z'}{4}, \alpha\frac{x+y+2z}{4}+\beta\frac{x'+y'+2z'}{4}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{3x-y+2z}{4}, \frac{-x+3y+2z}{4}, \frac{x+y+2z}{4}\right)+\beta\left(\frac{3x'-y'+2z'}{4}, \frac{-x'+3y'+2z'}{4}, \frac{x'+y'+2z'}{4}\right)$$

$$= \alpha p(u)+\beta p(v)$$

On déduit donc : $\boxed{p \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$

② Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Nous allons démontrer que $(p\circ p)(u)=p(u)$. On a :

$$(p\circ p)(u) = p\left(\frac{3x-y+2z}{4}, \frac{-x+3y+2z}{4}, \frac{x+y+2z}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{3\left(\frac{3x-y+2z}{4}\right)-\left(\frac{-x+3y+2z}{4}\right)+2\left(\frac{x+y+2z}{4}\right)}{4}, \frac{-\left(\frac{3x-y+2z}{4}\right)+3\left(\frac{-x+3y+2z}{4}\right)+2\left(\frac{x+y+2z}{4}\right)}{4}, \frac{\left(\frac{3x-y+2z}{4}\right)+\left(\frac{-x+3y+2z}{4}\right)+2\left(\frac{x+y+2z}{4}\right)}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{3x-y+2z}{4}, \frac{-x+3y+2z}{4}, \frac{x+y+2z}{4}\right) = p(u)$$

Ainsi : $p\circ p=p$, d'où : $\boxed{p \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^3}$

③ D'après le cours, on a la relation : $s=2p-id_E$

On déduit : $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad s(x,y,z)=\left(\frac{3x-y+2z}{2}, \frac{-x+3y+2z}{2}, \frac{x+y+2z}{2}\right)-(x,y,z)$

Ainsi : $\boxed{\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad s(x,y,z)=\left(\frac{x-y+2z}{2}, \frac{-x+y+2z}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}$

④ . $(x,y,z)\in \ker(p) \iff p(x,y,z)=(0,0,0) \iff \begin{cases}3x-y+2z=0\\-x+3y+2z=0\\x+y+2z=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=3x+2z\\-x+9x+6z+2z=0\\x+3x+2z+2z=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=x\\z=-x\\z=-x\end{cases}$

Ainsi : $\ker(p)=\{(x,x,-x),\ x\in\mathbb{R}\}$ Finalement : $\boxed{\ker(p)=\text{Vect}(1,1,-1)}$

. Puisque p est un projecteur, on peut écrire :

$(x,y,z)\in \text{Im}(p) \iff p(x,y,z)=(x,y,z) \iff \begin{cases}3x-y+2z=4x\\-x+3y+2z=4y\\x+y+2z=4z\end{cases} \iff x+y+2z=0 \iff y=-x-2z$

Ainsi : $\text{Im}(p)=\{(x,-x-2z,z),\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\}=\{x(1,-1,0)+z(0,-2,1),\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\}$

Finalement : $\boxed{\text{Im}(p)=\text{Vect}\left((1,-1,0),(0,-2,1)\right)}$

3/4

⑥ Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $T(P)=8P$. D'après la question ⑤, on a alors nécessairement $\deg(P)=3$.
Écrivons $P=aX^3+bX^2+cX+d$. D'après les calculs de la question ④, on a :
$$T(P)=(-a+3b)X^3+4cX^2+3(c+d)X+8d \text{ , d'où :}$$
$$T(P)=8P \iff \begin{cases}-a+3b=8a\\4c=8b\\3(c+d)=8c\\8d=8d\end{cases} \iff \begin{cases}3b=9a\\c=2b\\3d=5c\end{cases} \iff \begin{cases}b=3a\\c=6a\\d=10a\end{cases}$$
Ainsi l'ensemble des polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ vérifiant $T(P)=8P$ est l'ensemble des polynômes de la forme $aX^3+3aX^2+6aX+10a$ avec $a\in\mathbb{C}$.

Niveau 4 (10 points) : Exercice d'approfondissement

EXERCICE III

① **Montrons que $\ker(p)=\ker(q)$:**
- Soit $x\in\ker(p)$. On a donc $p(x)=0$, donc, puisque $q=r\circ p$, $q(x)=r(p(x))=r(0)=0$. On a donc $x\in\ker(q)$, ce qui montre l'inclusion $\ker(p)\subset\ker(q)$.
- Soit $x\in\ker(q)$. On a donc $q(x)=0$, donc, puisque $r=p\circ q$, $r(x)=p(q(x))=p(0)=0$ puis, vu que $p=q\circ r$, $p(x)=q(r(x))=q(0)=0$, d'où $x\in\ker(p)$. Ainsi $\ker(q)\subset\ker(p)$

Montrons que $\ker(q)=\ker(r)$:
- Soit $x\in\ker(q)$. On a donc $q(x)=0$, donc, puisque $r=p\circ q$, il vient $r(x)=p(q(x))=p(0)=0$. On a donc $x\in\ker(r)$, ce qui montre l'inclusion $\ker(q)\subset\ker(r)$.
- Soit $x\in\ker(r)$. On a donc $r(x)=0$, donc, puisque $p=q\circ r$, il vient $p(x)=q(r(x))=q(0)=0$ puis, vu que $q=r\circ p$, $q(x)=r(p(x))=r(0)=0$, d'où $x\in\ker(q)$. Ainsi $\ker(r)\subset\ker(q)$.

Finalement : $\boxed{\ker(p)=\ker(q)=\ker(r)}$

② **Montrons que $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}(q)$:**
- Soit $y\in\mathrm{Im}\,p$. Il existe $x\in E$ tel que $y=p(x)=(q\circ r)(x)=q(r(x))$, d'où $y\in\mathrm{Im}(q)$. Ainsi : $\mathrm{Im}(p)\subset\mathrm{Im}(q)$
- Soit $y\in\mathrm{Im}(q)$. Il existe $x\in E$ tel que $y=q(x)=(r\circ p)(x)=(p\circ q\circ p)(x)=p((q\circ p)(x))$. Ainsi, $y\in\mathrm{Im}(p)$, d'où : $\mathrm{Im}(q)\subset\mathrm{Im}(p)$.

Montrons que $\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Im}(r)$:
- Soit $y\in\mathrm{Im}(q)$. Il existe $x\in E$ tel que $y=q(x)=(r\circ p)(x)=r(p(x))$, d'où $y\in\mathrm{Im}(r)$. Ainsi : $\mathrm{Im}\,q\subset\mathrm{Im}\,r$.
- Soit $y\in\mathrm{Im}(r)$. Il existe $x\in E$ tel que $y=r(x)=(p\circ q)(x)=(q\circ r\circ q)(x)=q((r\circ q)(x))$, d'où $y\in\mathrm{Im}\,q$. Ainsi : $\mathrm{Im}(r)\subset\mathrm{Im}(q)$.

Finalement : $\boxed{\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Im}(r)}$

③ **Montrons que $p^2=q^2$:** $p^2=p\circ p=(q\circ r)\circ p=q\circ(r\circ p)=q\circ q=q^2$

Montrons que $q^2=r^2$: $q^2=q\circ q=(r\circ p)\circ q=r\circ(p\circ q)=r\circ r=r^2$

Finalement : $\boxed{p^2=q^2=r^2}$

④ On a :
- $p^2qp^2=q^2qq^2$ (car $p^2=q^2$), donc $p^2qp^2=q^5$
- $p^2qp^2=p\circ(pq)\circ p^2=p\circ r\circ p\circ p^2=p\circ(r\circ p)\circ p=p\circ q\circ p=r\circ p=q$

Ainsi : $\boxed{q^5=q}$

3/6

(5) • Montrons que $Ker(q) \cap Im(q) = \{0\}$: On a bien entendu $\{0\} \subset Ker(q) \cap Im(q)$. Réciproquement, soit $x \in Ker(q) \cap Im(q)$.
On a donc $q(x) = 0$ et d'autre part : $\exists a \in E,\ x = q(a)$
Puisque $q^5 = q$, on a donc : $x = q^5(a) = q^4(q(a)) = q^4(x) = q^3(q(x)) = q^3(0) = 0$
Ainsi, $Ker(q) \cap Im(q) \subset \{0\}$, d'où l'égalité.

• Montrons que $E = Ker(q) + Im\,q$: On a bien entendu $Ker(q) + Im(q) \subset E$. Réciproquement, soit $x \in E$.

• Analyse : On cherche $y \in Ker(q)$ et $z = q(a) \in Im(q)$ tels que $x = y + z = y + q(a)$
Les éléments y et z doivent donc vérifier $q^4(x) = q^4(y) + q^5(a) = q^3(q(y)) + q(a)$ (car $q^5 = q$)
$= q^3(0) + z = z$
ce qui nous donne $y = x - q^4(x)$ et $z = q^4(x)$

• Synthèse : Posons $y = x - q^4(x)$ et $z = q^4(x)$:
- $q(y) = q(x) - q^5(x) = q(x) - q(x) = 0$ (car $q^5 = q$), donc $y \in Ker(q)$.
- $z = q^4(x) = q(q^3(x))$, d'où $z \in Im(q)$
- $y + z = x - q^4(x) + q^4(x) = x$

On a donc écrit $x = y + z$ avec $y \in Ker(q)$ et $z \in Im(q)$, d'où $E \subset Ker\,q + Im(q)$.

En conclusion : $\boxed{E = Ker(q) \oplus Im(q)}$

EXERCICE IV

(1) Rappel : On a vu dans le chapitre sur "L'ensemble des réels" que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a-b|$

Supposons que f est lipschitzienne sur I : $\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$

En appliquant l'inégalité du rappel à $a = f(x)$ et $b = f(y)$, on trouve : $\big|\,|f(x)| - |f(y)|\,\big| \leq |f(x) - f(y)|$

On a donc : $\forall (x,y) \in I^2,\ \big|\,|f(x)| - |f(y)|\,\big| \leq |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$

Finalement : $\boxed{\text{Si } f \text{ est lipschitzienne sur } I, \text{ alors } |f| \text{ est lipschitzienne sur } I}$

(2) Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccl} [0;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ -1 & \text{si } x \in]1;2] \end{cases} \end{array}$. On a : $\forall x \in [0,2],\ |f|(x) = 1$

Ainsi : $\forall (x,y) \in [0,2]^2,\ \big|\,|f|(x) - |f|(y)\,\big| = |1-1| = 0 \leq 1 \times |x-y|$, d'où $|f|$ est 1-lipschitzienne.

Supposons que f soit lipschitzienne : $\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in [0,2]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$

Prenons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x = 1 - \frac{1}{n} \in [0,1]$ et $y = 1 + \frac{1}{n} \in]1;2]$. On obtient $|1 - (-1)| \leq k \times \frac{2}{n}$

c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 \leq \frac{2k}{n}$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $2 \leq 0$, ce qui est absurde. Ainsi : f n'est pas lipschitzienne.

(3) Soient f et g deux fonctions lipschitziennes : $\exists k_1 \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k_1\,|x-y|$

$\exists k_2 \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |g(x) - g(y)| \leq k_2\,|x-y|$

4/6