

## Déterminants & Systèmes

### Simulation DS

Lundi 28 Mai 2018

Documents et Calculatrices Interdits

Durée : 1 heure

#### Questions de Cours : Niveau 1=5 points.

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_l(\mathbb{R})$ . Compléter le vide

- 1  $\det(AB) = \dots$  ;
- 2  $\det(\lambda A) = \dots$  ;
- 3  $A$  inversible  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ , dans ce cas  $\det(A^{-1}) = \dots$  ;
- 4  $A^t \text{com}(A) = \dots$  ;
- 5  $\det(B^{-1}AB) = \dots$ .

#### Exercice (Application de Cours) : Niveau 2=5 points.

1 Montrer que 
$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b).$$

- 2 Pour  $a, b$  et  $c$  donnés, dont les valeurs absolues sont deux à deux distincte

Montrer que

$$\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix} = (X+a+b+c)(X+a+b-c)(X+a-b+c)(X-a+b+c).$$

- 3 Donner une base du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^5$  défini par :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}.$$

 Problème (Analyse & Synthèse) : Niveau 3-4 : 10 points.

## Un système tridiagonal symétrique

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $A_n$  la matrice carrée d'ordre  $n$  de terme général  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |j - i| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi  $A_1 = (0)$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on pose  $P_n(x) = \det(A_n + xI_n)$  pour  $n \geq 1$ .

Par convention, on pose  $P_0(x) = 1$ .

Ainsi  $P_1(x) = |x| = x$ ,  $P_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ ,  $P_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ ,  $P_4(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

1. Préciser les expressions de  $P_3(x)$  et de  $P_4(x)$
2. Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , et tout  $n \geq 2$ , on a  $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) = 0$ .
3. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , l'application  $P_n$  est une fonction polynomiale unitaire de degré  $n$ , et qu'elle a la même parité que  $n$ .
4. On fixe dans  $\mathbb{R}$  la valeur de  $x$ , et on pose  $u_n = P_n(x)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
  - (a) Montrer que si  $x = 2\varepsilon$  (où  $\varepsilon = \pm 1$ )  $u_n = (n + 1)\varepsilon^n$ .
  - (b) Montrer que si  $x$  n'est pas dans  $\{-2, 2\}$ , alors  $u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ , en notant  $\alpha$  et  $\beta$  les racines distinctes de l'équation  $\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0$ .
  - (c) On suppose  $|x| < 2$ . Avec  $\theta = \arccos \frac{x}{2}$ , montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ .
5. Calculer  $I_{n,m} = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} P_n(x) P_m(x) dx$ , pour tous  $n, m$  dans  $\mathbb{N}$ .
6. (a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , le polynôme  $P_n$  possède  $n$  zéros distincts, tous réels, et donnés par :  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{n,k} = 2 \cos \theta_{n,k}$ , avec  $\theta_{n,k} = \frac{k\pi}{n+1}$ .
  - (b) Montrer alors que  $P_{n-1}(a_{n,k}) = (-1)^{k+1}$ .
7. On se donne un réel  $\lambda$  et on considère le système  $(S_{n,\lambda})$  défini par
 
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \dots \\ x_{n-2} + \lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + \lambda x_n = 0 \end{cases}$$
  - (a) Résoudre  $(S_{n,\lambda})$  quand  $\lambda \notin \{a_{n,1}, \dots, a_{n,n}\}$ .
  - (b) On suppose que  $\lambda = a_{n,k} = 2 \cos \theta_{n,k}$ .

Montrer alors que le système est de rang  $n - 1$ , et que l'ensemble des solutions est la droite engendrée par  $v_n = (\sin \theta_k, -\sin 2\theta_k, \dots, (-1)^{n-1} \sin n\theta_k)$ .

End Exam

2. Pour  $n \geq 3$ , on développe le déterminant égal à  $P_n(x)$  par rapport à sa première ligne.

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}}_{= P_{n-1}(x)} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

On constate (après développement par rapport à la première colonne) que ce dernier déterminant, d'ordre  $n - 1$ , est en fait égal à  $P_{n-2}(x)$ .

Pour tout  $n \geq 3$  et tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a ainsi obtenu :  $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ .

On voit que cette relation est encore vraie si  $n = 2$ , par définition de  $P_0, P_1, P_2$ .

3.  $P_0$  et  $P_1$  sont polynomiales unitaires, avec  $\deg P_0 = 0$  et  $\deg P_1 = 1$ .

S'il en est ainsi de  $P_{n-2}$  et  $P_{n-1}$ , avec  $n \geq 2$ , alors  $P_n : x \mapsto xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$  est encore une application polynomiale unitaire, et elle est de degré  $n$ .

La fonction  $P_0$  est paire, et la fonction  $P_1$  est impaire. On se donne un entier  $n \geq 2$  et on suppose que  $P_{n-1}$  a la parité de  $n - 1$  et que  $P_{n-2}$  a celle de  $n - 2$  (donc celle de  $n$ .)

L'application  $x \mapsto xP_{n-1}$  a la parité contraire de celle de  $P_{n-1}$  donc a la parité de  $n$ .

Ainsi  $P_n : x \mapsto xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$  a la parité de  $n$ , ce qui achève la récurrence.

4. (a) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  vérifie  $u_n - 2\varepsilon u_{n-1} + u_{n-2} = 0$  pour tout  $n \geq 2$ , et  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2\varepsilon \end{cases}$ .

L'équation caractéristique est  $t^2 - 2\varepsilon t + 1 = 0$  donc  $(t - \varepsilon)^2 = 1$ .

$\varepsilon$  étant racine double, il existe  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbb{R}$  tels que ;  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)\varepsilon^n$ .

Les valeurs initiales  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 2\varepsilon$  donne :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n + 1)\varepsilon^n$ .

(b) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  vérifie  $u_n - x u_{n-1} + u_{n-2} = 0$  pour tout  $n \geq 2$ .

L'équation caractéristique est  $t^2 - x t + 1 = 0$ .

Le discriminant  $\Delta = x^2 - 4$  est non nul puisque  $x \notin \{-2, 2\}$ .

Notons alors  $\alpha, \beta$  les racines (réelles ou complexes) distinctes de cette équation.

On sait qu'il existe  $\lambda, \mu$  (dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$ .

Les conditions initiales  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = x \end{cases}$  donne  $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \alpha + \mu \beta = x = \alpha + \beta \end{cases}$

On en déduit  $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}$  et  $\mu = \frac{\beta}{\beta - \alpha}$  donc  $u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$  pour tout  $n \geq 0$ .

(c) Si  $|x| < 2$ , alors on peut poser  $\theta = \arccos \frac{x}{2}$  et on a  $0 < \theta < \pi$  et  $x = 2 \cos \theta$ .

Avec les notations précédentes, on a  $\Delta = -4 \sin^2 \theta$  donc  $\begin{cases} \alpha = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \\ \beta = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} \end{cases}$

Dans ces conditions, pour tout  $n \geq 0$  :  $u_n = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ .

5. Sur le segment  $] - 2, 2[$ , on peut poser  $x = 2 \cos \theta$ , avec  $0 < \theta < \pi$ . On obtient :

$$I_{n,m} = \int_0^\pi (4 \sin^2 \theta) \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta} d\theta = 4 \int_0^\pi \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta d\theta.$$

$$\text{Ainsi } I_{n,m} = 2 \int_0^\pi (\cos(m-n)\theta - \cos(m+n+2)\theta) d\theta = 2 \int_0^\pi \cos(m-n)\theta d\theta.$$

Si  $m \neq n$ , on trouve  $I_{m,n} = 0$ . Si  $m = n$ ,  $I_{n,n} = 2 \int_0^\pi d\theta = 2\pi$ .

6. (a) Sur  $] - 2, 2[$  on pose  $x = 2 \cos \theta$ , avec  $0 < \theta < \pi$ . On a alors  $P_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ .

Dans ces conditions :

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(n+1)\theta = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}, \theta = \frac{k\pi}{n+1}.$$

Ainsi les  $x_{n,k} = \cos \theta_{n,k}$ , avec  $1 \leq k \leq n$ , sont des racines ( $\neq$  deux à deux) de  $P_n$ .

On a donc obtenu  $n$  racines de  $P_n$ , toutes réelles, distinctes, et éléments de  $] - 2, 2[$ .

Comme ce polynôme est de degré  $n$ , on a obtenu toutes les racines de  $P_n$ .

$$(b) \text{ On a } P_{n-1}(a_{n,k}) = P_{n-1}(2 \cos \theta_{n,k}) = \frac{\sin n\theta_{n,k}}{\sin \theta_{n,k}} = \frac{\sin(k\pi - \theta_{n,k})}{\sin \theta_{n,k}} = (-1)^{k+1}.$$

7. (a) Le déterminant du système, égal à  $P_n(\lambda)$ , est non nul si  $\lambda \notin \{a_{n,1}, \dots, a_{n,n}\}$ .

Ce système homogène est donc "de Cramer" : sa seule solution est  $(0, 0, \dots, 0)$ .

(b) Avec  $\lambda = a_{n,k}$ , le système n'est plus de Cramer car le déterminant est nul.

On voit que le déterminant extrait des  $n-1$  premières lignes et colonnes est  $P_{n-1}(\lambda)$ .

Ici  $P_{n-1}(\lambda) = P_{n-1}(a_{n,k}) = (-1)^{k+1}$  est non nul.

La matrice du système est donc de rang  $n-1$  (les lignes  $L_1, \dots, L_{n-1}$  sont libres.)

Résoudre  $S_{n,\lambda}$ , c'est trouver le noyau d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  de rang  $n-1$ .

D'après le théorème de la dimension, les solutions forment une droite vectorielle.

Pour conclure, il suffit de vérifier que le vecteur  $v_n \neq \vec{0}$  est sur cette droite.

Notons  $v_{n,j} = (-1)^{j-1} \sin(j\theta_{n,k})$ , pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , les composantes de  $v_n$ .

On pose aussi  $v_{n,0} = 0$  et  $v_{n,n+1} = (-1)^n \sin((n+1)\theta_{n,k}) = (-1)^n \sin(k\pi) = 0$ .

Avec cette définition étendue des  $v_{n,j}$ , vérifier que  $v_n$  est solution de  $S_{n,\lambda}$  consiste à établir les  $n$  égalités  $v_{n,j-1} + \lambda v_{n,j} + v_{n,j+1} = 0$  pour  $1 \leq j \leq n$ .

Effectivement, pour tout indice  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on trouve :

$$\begin{aligned} v_{n,j-1} + v_{n,j+1} &= (-1)^{j-1} (\sin(j-1)\theta_{n,k} + \sin(j+1)\theta_{n,k}) \\ &= 2(-1)^{j-1} \sin(j\theta_{n,k}) \cos(2\theta_{n,k}) \\ &= -(-1)^j \lambda \sin(j\theta_{n,k}) = -\lambda v_{n,j} \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de  $S_{n,\lambda}$  est la droite engendrée par  $v_n$ .

